LÊ HỒNG ĐỨC

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 11

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÓM CỰ MÔN
LÊ BÍCH NGỌC - NGUYỄN VIẾT HOÀ
LÊ HỒNG ĐỨC - LÊ HỮU TRÍ

PHƯƠNG PHÁP
GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM
HÌNH HỌC 11

A	B	C	D

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Sự ưu việt của phương pháp thi trắc nghiệm đã và đang được chứng minh từ những nước có nền giáo dục tiên tiến trên thế giới bởi những ưu điểm như tính khách quan, tính bao quát và tính kinh tế.

Theo chủ trương của BGD&ĐT các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp sẽ chuyển sang hình thức tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm. Và để có được thời gian chuẩn bị tốt nhất, các bài kiểm tra kiến thức trong chương trình THCS và THPT cũng sẽ có phần trắc nghiệm để các em học sinh làm quen.

Tuy nhiên, việc biên soạn các câu hỏi trắc nghiệm cần tuân thủ một số yêu cầu cơ bản về mặt lí luận sư phạm và ý nghĩa đích thực của các số liệu thống kê. Ngoài ra, một đề thi môn toán được chấm hoàn toàn dựa trên kết quả trắc nghiệm chắc chắn sẽ chưa phù hợp với hiện trạng giáo dục của nước ta bởi nhiều lí do, từ đó dẫn tới việc không đảm bảo được tính khách quan trong việc đánh giá kết quả học tập của học sinh. Để khắc phục nhược điểm này Nhóm Cự Môn chúng tôi đề xuất hướng thực hiện như sau:

1. *Với mỗi đề thi hoặc đề kiểm tra vẫn tuân thủ đúng cấu trúc chung và điểm trắc nghiệm không quá 3.5 điểm.*
2. *Ở đây, thông thường các em học sinh sẽ phải lựa chọn một trong bốn đáp số và cần biết rằng số điểm a của câu hỏi này được chia làm đôi:*

- *Nếu lựa chọn đúng lời giải trắc nghiệm sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm.*
- *Nếu thực hiện đúng lời giải tự luận cho câu hỏi sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm còn lại.*

Đây chính là yếu tố để đảm bảo tính khách quan bởi:

1. *Với những học sinh chỉ mò mẫm đáp án hoặc nhận được nó thông qua những yếu tố xung quanh sẽ chỉ nhận được tối đa* $\frac{a}{2}$ *điểm với xác suất 25%.*
2. *Với những học sinh hiểu được nội dung câu hỏi từ đó định hướng được các phép thử bằng tay hoặc bằng máy tính fx – 570MS chắc chắn sẽ nhận được* $\frac{a}{2}$ *điểm. Thí dụ với câu hỏi:*

   (1 điểm): Giải phương trình $\sqrt{x} = 2 - x$.

   A. $x = 0$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 1$.

   Cách 1: Thực hiện phép thử bằng tay, các em sẽ cần thử cho các nghiệm $x = 0$, $x = 5$, $x = 4$, $x = 1$, cụ thể:

   - Với $x = 0$, ta được:
     $\sqrt{0} = 2 - 0$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 0$ không là nghiệm.
   - Với $x = 5$, ta được:
     $\sqrt{5} = 2 - 5 = -3$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 5$ không là nghiệm.
   - Với $x = 4$, ta được:
     $\sqrt{4} = 2 - 4 = -2$, mâu thuẫn $\Rightarrow x = 4$ không là nghiệm.
   - Với $x = 1$, ta được: $\sqrt{1} = 2 - 1 = 1$, đúng $\Rightarrow x = 1$ là nghiệm.

Vậy, các em sẽ lựa chọn câu trả lời trắc nghiệm là x = 1.

Cách 2: Sử dụng máy tính fx – 570MS bằng cách lần lượt thực hiện:

Nhập phương trình $\sqrt{x} - 2 + x = 0$ vào máy tính bằng cách ấn:

√ ALPHA X − 2 + ALPHA X

- Để thử với x = 0, ta ấn:

  CALC 0 = → −2

- Để thử với x = 5, ta ấn:

  CALC 5 = → 5.236067978

- Để thử với x = 4, ta ấn:

  CALC 4 = → 4

- Để thử với x = 1, ta ấn:

  CALC 1 = → 0

Vậy, các em sẽ lựa chọn câu trả lời trắc nghiệm là x = 1.

3. *Với những học sinh khá hơn biểu hiện bằng việc hiểu được nội dung câu hỏi và có thể thực hiện được một phần câu hỏi này dưới dạng tự luận sẽ nhận được khoảng* $\frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$ *điểm.*
4. *Cuối cùng, với những học sinh biết cách thực hiện câu hỏi dưới dạng tự luận sẽ nhận được a điểm.*

Dựa trên tư tưởng này, Nhóm Cự Môn dưới sự phụ trách của Lê Hồng Đức xin trân trọng giới thiệu tới bạn đọc bộ sách:

GIẢI BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TOÁN THPT

do Thạc sĩ Toán học Lê Hồng Đức chủ biên.

Bộ sách gồm 6 cuốn:

Cuốn 1: Giải bài tập trắc nghiệm Đại số 10
Cuốn 2: Giải bài tập trắc nghiệm Hình học 10
Cuốn 3: Giải bài tập trắc nghiệm Đại số và Giải tích 11
Cuốn 4: Giải bài tập trắc nghiệm Hình học 11
Cuốn 5: Giải bài tập trắc nghiệm Đại số và Giải tích 12
Cuốn 6: Giải bài tập trắc nghiệm Hình học 12

Cuối cùng, cho dù đã rất cố gắng, nhưng thật khó tránh khỏi những thiếu sót bởi những hiểu biết và kinh nghiệm còn hạn chế, rất mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu của bạn đọc gần xa. Mọi ý kiến đóng góp xin liên hệ tới:

Địa chỉ: Nhóm tác giả Cự Môn do Th.S Toán học Lê Hồng Đức phụ trách
Số 20 - Ngõ 86 - Đường Tô Ngọc Vân - Quận Tây Hồ - Hà Nội
Điện thoại: (04) 7196671 hoặc 0893046689
E-mail: cumon@hn.vnn.vn hoặc lehongduc39@yahoo.com.

Hà Nội, ngày 10 tháng 8 năm 2007

NHÓM CỰ MÔN

CHƯƠNG I.

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§ 1. MỞ ĐẦU VỀ PHÉP BIẾN HÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP BIẾN HÌNH

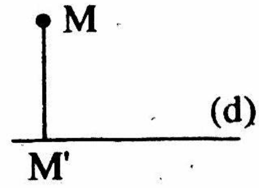
Định nghĩa 1: *Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm* M *của mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất* M' *của mặt phẳng, điểm* M' *gọi là ảnh của điểm* M *qua phép biến hình đó.*

Nếu ta kí hiệu một phép biến hình nào đó là f thì:

- M' = f(M).
- Nếu **H** là một hình nào đó thì tập hợp các điểm M' = f(M), với M ∈ **H**, tạo thành hình **H'**, ta viết **H'** = f(**H**).

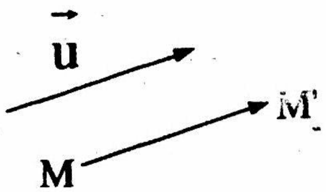
2. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M, ta xác định M' là hình chiếu (vuông góc) của M trên d thì ta được một phép biến hình.



Phép biến hình này gọi là ***phép chiếu vuông góc lên đường thẳng*** d.

Ví dụ 2. Cho vectơ $\vec{u}$, với mỗi điểm M ta xác định điểm M' theo quy tắc $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Như vậy, ta cũng có một phép biến hình. Phép biến hình đó gọi là ***phép tịnh tiến theo vectơ*** $\vec{u}$.

Ví dụ 3. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' trùng với M thì ta cũng có được một phép biến hình.

Phép biến hình đó gọi là ***phép đồng nhất***.

§ 2. PHÉP TỊNH TIẾN VÀ PHÉP DỜI HÌNH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP TỊNH TIẾN

Định nghĩa: *Phép tịnh tiến vectơ* $\vec{v}$, *kí hiệu* $T_{\vec{v}}$ *là một phép dời hình biến điểm* M *thành* M' *sao cho* $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Chú ý:

1. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ còn được gọi là *phép đồng nhất*.

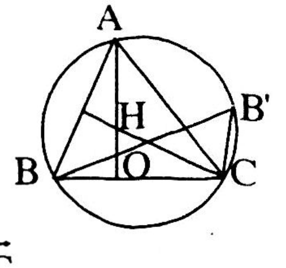
2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(a; b)$ biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ với:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

Ứng dụng của phép tịnh tiến

Bài toán 1: Cho hai điểm B và C cố định trên đường tròn (O, R) và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trực tâm tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Giải



Nếu BC là đường kính thì trực tâm H của ΔABC chính là A. Vậy H nằm trên đường tròn cố định (O, R).

Nếu BC không phải là đường kính, vẽ đường kính BB' của đường tròn.

Dễ thấy rằng nếu H là trực tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$.

Như vậy, phép tịnh tiến theo vectơ cố định $\overrightarrow{B'C}$ biến điểm A thành điểm H. Do đó, khi A thay đổi trên (O ; R) thì trực tâm H luôn nằm trên đường tròn cố định là ảnh của đường tròn (O ; R) qua phép tịnh tiến nói trên.

Bài toán 2. Hai thôn nằm ở hai vị trí A và B cách nhau một con sông (xem rằng hai bờ sông là hai đường thẳng song song). Người ta dự định xây một chiếc cầu MN bắc qua sông (tất nhiên cầu phải vuông góc với bờ sông) và đắp hai đoạn thẳng từ A đến M và từ B đến N. Hãy xác định vị trí của chiếc cầu MN sao cho AM + BN ngắn nhất.

2. PHÉP DỜI HÌNH

***Định nghĩa 1**: Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, tức là: với bất kì hai điểm* M, N *và ảnh* M', N' *của chúng, ta luôn có* MN = M'N'.

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP DỜI HÌNH

***Định lí**: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng*

Hệ quả: Phép dời hình biến:

- Đường thẳng thành đường thẳng.
- Tia thành tia.
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.
- Tam giác thành tam giác bằng nó.
- Đường tròn thành đường tròn bằng nó.
- Phép dời hình bảo toàn độ lớn của góc.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 1: Khẳng định " $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$" là đúng hay sai ?

A. Đúng. B. Sai.

Bài 2: Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

A. Không có phép tịnh tiến nào. C. Chỉ có hai phép tịnh tiến.

B. Có duy nhất 1 phép tịnh tiến. D. Có rất nhiều phép tịnh tiến.

Bài 3: Cho bốn đường thẳng a, b, a', b' trong đó a // a', b // b', a cắt b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến biến đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'.

A. Không có phép tịnh tiến nào. C. Chỉ có hai phép tịnh tiến.

B. Có duy nhất 1 phép tịnh tiến. D. Có rất nhiều phép tịnh tiến.

Bài 4: Qua phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$, đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Trong trường hợp nào thì:

a. d trùng d' ?

A. d song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

B. d không song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

C. d vuông góc với giá của vectơ $\vec{u}$.

D. Không có.

b. d song song với d' ?

A. d song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

B. d không song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

C. d vuông góc với giá của vectơ $\vec{u}$.

D. Không có.

c. d cắt d' ?

A. d song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

B. d không song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

C. d vuông góc với giá của vectơ $\vec{u}$.

D. Không có.

Bài 5: Cho phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo $\vec{u}$ và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ theo $\vec{v}$. Với điểm M bất kì, $T_{\vec{u}}$ biến M thành điểm M', $T_{\vec{v}}$ biến M' thành M". Khẳng định phép biến hình biến điểm M thành M" là một phép tịnh tiến là đúng hay sai ?

A. Đúng. B. Sai.

Bài 6: Cho đường tròn (O) và hai điểm A và B. Một điểm M thay đổi trên đường tròn (O). Quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ là:

A. $(O') = T_{\overrightarrow{AB}}((O))$.
C. $(O') = T_{\overrightarrow{AM}}((O))$.

B. $(O') = T_{\overrightarrow{BA}}((O))$.
D. $(O') = T_{\overrightarrow{BM}}((O))$.

Bài 7: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, với α, a, b là những số cho trước, xét phép biến hình F biến mỗi điểm M(x ; y) thành điểm M'(x', y'), trong đó:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + b \end{cases}.$$

Cho hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ và gọi M', N' lần lượt là ảnh của M, N qua phép f.

a. Hãy tìm toạ độ của điểm M'.

A. $M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)$.

B. $M'(x_1.\cos\alpha + y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)$.

C. $M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha - y_1.\cos\alpha)$.

D. $M'(x_1.\cos\alpha + y_1.\sin\alpha; x_1.\sin\alpha - y_1.\cos\alpha)$.

b. Hãy tìm toạ độ của điểm N'.

A. $N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha)$.

B. $N'(x_2.\cos\alpha + y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha)$.

C. $N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha - y_2.\cos\alpha)$.

D. $N'(x_2.\cos\alpha + y_2.\sin\alpha; x_2.\sin\alpha - y_2.\cos\alpha)$.

c. Tính khoảng cách d giữa M và N.

A. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
C. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

B. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.
D. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

d. Tính khoảng cách d' giữa M' và N'.

A. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
C. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

B. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
D. $d = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$.

e. Phép F có phải là phép dời hình hay không ?

A. Có.
B. Không.

f. Khi α = 0, khẳng định F là phép tịnh tiến là đúng hay sai ?

A. Đúng.
B. Sai.

Bài 8: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xét các phép biến hình sau đây:

- Phép biến hình F_1 biến mỗi điểm M(x, y) thành điểm M'(y ; –x).
- Phép biến hình F biến mỗi điểm M(x, y) thành điểm M'(2x ; y).

Trong hai phép biến hình trên, phép nào là phép dời hình.

Bài 9: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của ΔAOF qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

A. ΔABO. **B.** ΔBCO. **C.** ΔCDO. **D.** ΔDEO.

Bài 10: Cho tứ giác ABCD có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi:

$$MP + NQ = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$$

Bài 11: Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{v}(2; -1)$ và điểm $M(-3; 2)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm có toạ độ nào trong các toạ độ sau đây ?

A. $(5; 3)$. **B.** $(1; 1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(1; -1)$.

Bài 12: Cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các trường hợp sau :

A. $\vec{v} = (2; 1)$. **B.** $\vec{v} = (2; -1)$. **C.** $\vec{v} = (1; 2)$. **D.** $\vec{v} = (-1; 2)$.

Bài 13: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(-1; 2)$ và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$. Gọi A' và d' là ảnh của A và d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2; 1)$.

a. Tìm tọa độ của điểm A'.

A. $A'(1; 3)$. **B.** $A'(3; 1)$. **C.** $A'(-3; 1)$. **D.** $A'(-1; 3)$.

b. Tìm phương trình của đường thẳng d'.

A. (d'): $3x + y - 2 = 0$. **C.** (d'): $x + 3y - 2 = 0$.

B. (d'): $3x + y - 6 = 0$. **D.** (d'): $x + 3y - 6 = 0$.

Bài 14: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (-1; 2)$, $A(3; 5)$, $B(-1; 1)$ và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$. Gọi A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

a. Tìm tọa độ của điểm A'.

A. $A'(2; 7)$. **B.** $A'(7; 2)$. **C.** $A'(7; -2)$. **D.** $A'(2; -7)$.

b. Tìm tọa độ của điểm B'.

A. $B'(-3; 2)$. **B.** $B'(-2; 3)$. **C.** $B'(2; 3)$. **D.** $B'(3; -2)$.

c. Tìm tọa độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

A. $C(1; 3)$. **B.** $C(3; 4)$. **C.** $C(4; 3)$. **D.** $C(3; 1)$.

d. Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

A. (d'): $2x - y + 4 = 0$. **C.** (d'): $x - 2y + 4 = 0$.

B. (d'): $2x - y + 8 = 0$. **D.** (d'): $x - 2y + 8 = 0$.

Bài 15: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn tâm $I(3; -2)$, bán kính 3.

a. Viết phương trình đường tròn đó.

A. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. **C.** $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

B. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$. **D.** $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

b. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I, 3) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-2; 1)$.

A. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$. **C.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

B. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$. **D.** $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Bài 16: Tìm phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C): $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}(2; 1)$.

A. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$. **C.** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

B. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$. **D.** $x^2 + (y + 2)^2 = 4$.

Bài 17: Hãy tìm vectơ $\vec{v}(a; b)$ sao cho khi tịnh tiến đồ thị $y = f(x) = x^3 + 3x + 1$ theo $\vec{v}$ ta nhận được đồ thị hàm số $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

A. $\vec{v}(1; -2)$. **B.** $\vec{v}(-1; 2)$. **C.** $\vec{v}(1; 2)$. **D.** $\vec{v}(-1; -2)$.

Bài 18: Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành MABN. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

§ 3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Nhắc lại: *Điểm* M' *được gọi là đối xứng với điểm* M *qua đường thẳng* a *nếu* a *là đường trung trực của đoạn thẳng* MM'.

Trường hợp đặc biệt, nếu M *nằm trên* a *thì ta xem* M *đối xứng với chính nó qua* a.

Định nghĩa 1: *Phép đối xứng qua đường thẳng* a *là phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành* M' *đối xứng với* M *qua đường thẳng* a.

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là $Đ_a$. Vậy:

$M' = Đ_a(M) \Leftrightarrow$ a là trung trực đoạn MM'.

Chú ý: Ta luôn có:
- $M' = Đ_a(M) \Rightarrow M = Đ_a(M')$.
- $M \in a \Rightarrow Đ_a(M) = M$.

Định lí: Phép đối xứng trục là phép dời hình.

2. TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

***Định nghĩa 2**: Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình* **H** *nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến* **H** *thành chính nó, tức là $Đ_d$(**H**) = **H**.*

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 19: Qua phép đối xứng trục $Đ_a$ (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d'. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a. Khi nào thì d song song với d' ?

A. $d \parallel a$. **B.** $d \equiv a$. **C.** $d \perp a$. **D.** $g(d, a) = 45^0$.

b. Khi nào d vuông góc với d' ?

A. $d \parallel a$. **B.** $d \equiv a$. **C.** $d \perp a$. **D.** $g(d, a) = 45^0$.

Bài 20: Cho hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Có bao nhiêu phép đối xứng trục biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

A. Không có phép đối xứng trục nào. **C.** Chỉ có hai phép đối xứng trục.

B. Có duy nhất 1 phép đối xứng trục. **D.** Có rất nhiều phép đối xứng trục.

Bài 21: Trong các hình sau đây, hình nào có 4 trục đối xứng.

A. Hình bình hành. **C.** Hình thoi.

B. Hình chữ nhật. **D.** Hình vuông.

Bài 22: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào SAI ?

A. Hình gồm hai đường tròn không bằng nhau có trục đối xứng.

B. Hình gồm một đường tròn và một đoạn thẳng tuỳ ý có trục đối xứng.

C. Hình gồm một đường tròn và một đường thẳng tuỳ ý có trục đối xứng.

D. Hình gồm một tam giác cân và đường tròn ngoại tiếp tam giác đó có trục đối xứng.

Bài 23: Hình vuông có mấy trục đối xứng ?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** vô số

Bài 24: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng d có phương trình $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là:

A. $3x + 2y + 1 = 0$. **C.** $3x + 2y - 1 = 0$.

B. $-3x + 2y + 1 = 0$. **D.** $3x - 2y + 1 = 0$.

Bài 25: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng (d): $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng (d') là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

A. $3x - y + 2 = 0$. **C.** $3x - y - 2 = 0$.

B. $3x + y + 2 = 0$. **D.** $3x + y - 2 = 0$.

Bài 26: Viết phương trình ảnh của các đường tròn sau qua phép đối xứng có trục Oy:

a. (C_1): $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$. **C.** $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 1 = 0$.

B. $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 1 = 0$.

b. (C_2): $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$.

A. $x^2 + y^2 + 10x - 5 = 0$. **C.** $x^2 + y^2 - 10x - 5 = 0$.

B. $x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0$. **D.** $x^2 + y^2 - 10y - 5 = 0$.

Bài 27: Trong mặt phẳng Oxy cho A(1; –2) và B(3; 1).

a. Tìm ảnh của A qua phép đối xứng trục Ox.

A. A'(1; –2). **B.** A'(–1; –2). **C.** A'(1; 2). **D.** A'(–1; 2).

b. Tìm ảnh của B qua phép đối xứng trục Ox.

A. B'(3; 1). **B.** B'(–3; 1). **C.** B'(3; –1). **D.** B'(–3; –1).

c. Tìm ảnh của đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

A. $3x - 2y - 7 = 0$. **C.** $3x + 2y - 7 = 0$.

B. $3x - 2y - 1 = 0$. **D.** $3x - 2y + 7 = 0$.

Bài 28: Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Bài 29: Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P , Q và hai điểm A, B nằm về một phía đối với d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất.

Bài 30: Cho hai điểm B và C cố định nằm trên đường tròn (O; R) và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 31: Cho hai đường tròn (O; R), (O'; R') và một đường thẳng d.

a. Tìm hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai đường tròn đó sao cho d là trung trực của đoạn thẳng MN.

b. Xác định điểm I trên d sao cho tiếp tuyến IT của (O ; R) và tiếp tuyến của IT' của (O' ; R') hợp thành các góc mà d là một trong các đường phân giác của góc đó.

Bài 32: Cho ΔABC có BC = a, CA = b, AB = c, p là nửa chu vi, h_a là độ dài đường cao từ A. Chứng minh rằng $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$.

Bài 33: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O, R). Gọi H là trực tâm của tam giác.

a. Chứng minh rằng các điểm đối xứng của H qua các cạnh của ΔABC nằm trên đường tròn (O, R). Từ đó suy ra các đường tròn (HBC), (HCA), (HAB) và (O) bằng nhau.

b. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn (HBC), (HCA), (HAB). Chứng minh ΔABC và $\Delta O_1O_2O_3$ bằng nhau.

Bài 34: Cho hai điểm A(1; 1) và B(3; 3)

a. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P tới các điểm A và B là nhỏ nhất.

A. $P_0(\frac{1}{2}; 0)$. **B.** $P_0(\frac{3}{2}; 0)$. **C.** $P_0(\frac{5}{2}; 0)$. **D.** $P_0(\frac{7}{2}; 0)$.

b. Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

A. $\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{5}$.

Bài 35: Tìm trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$.

A. $y = x + 1$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = x + 3$. **D.** $y = x + 4$.

§ 4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP QUAY

Định nghĩa: *Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác α không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = α được gọi là phép quay tâm O với góc quay α.*

Kí hiệu Q_O^α hay $Q(O; \alpha)$.

Định lí: Phép quay là một phép dời hình

2. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Định nghĩa: Phép đối xứng qua điểm O là một phép dời hình biến mỗi điểm M thành M' đối xứng với M qua O, tức là $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$.

Kí hiệu $Đ_O$ hay S_O.

Chú ý:

1. Phép quay tâm O, góc quay $\alpha = 180^0$ là phép đối xứng tâm O.
2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm I(a; b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Tâm đối xứng của một hình: *Điểm O được gọi là tâm đối xứng của hình* **H** *nếu phép đối xứng tâm* $Đ_O$ *biến hình* **H** *thành chính nó, tức là* $Đ_O$(**H**) = **H**.

3. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP QUAY

Bài toán 1: Cho hai tam giác đều OAB và OA'B' như hình vẽ. Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Chứng minh rằng OCD là tam giác đều

Giải

Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Rõ ràng Q biến đoạn AA' thành đoạn BB'.

Do đó: OC = OD và $\widehat{COD} = 60^0$. Vậy, ta được ΔOCD đều.

Bài toán 2: Cho đường tròn (O ; R) và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi điểm M chạy trên (O ; R).

Giải

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

Do đó, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm hay phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành M'.

Vậy khi M chạy trên đường tròn (O ; R) thì quỹ tích M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$.

Nếu ta gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn (O ; R).

Bài toán 3: Cho hai đường tròn (O ; R) và (O_1 ; R_1) cắt nhau tại hai điểm A, B. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A cắt (O ; R) và (O_1 ; R_1) lần lượt tại M và M_1 sao cho A là trung điểm của MM_1.

Giải

Giả sử ta đã dựng được đường thẳng d thoả mãn yêu cầu bài toán. Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng qua A thì $Đ_A$ biến điểm M thành điểm M_1 và biến đường tròn (O ; R) thành đường tròn (O' ; R).

Vì M nằm trên (O ; R) nên M_1 nằm trên (O' ; R).

Mặt khác, M_1 lại nằm trên (O_1 ; R_1) nên M_1 là giao điểm khác A của hai đường tròn (O' ; R) và (O_1 ; R_1).

Từ đó, suy ra cách dựng:

- Dựng đường tròn (O' ; R) đối xứng với (O ; R) qua A (O' là điểm đối xứng với O qua A).
- Lấy giao điểm M_1 của hai đường tròn (O' ; R) và (O_1 ; R_1), M_1 khác A.
- Đường thẳng d là đường thẳng đi qua A và M_1.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 36: Trong các hình sau đây, hình nào không có tâm đối xứng.

A. Hình gồm một đường tròn và một hình chữ nhật nội tiếp.

B. Hình gồm một đường tròn và một tam giác đều nội tiếp.

C. Hình lục giác đều.

D. Hình gồm một hình vuông và đường tròn nội tiếp.

Bài 37: Cho hình vuông ABCD tâm O. Xét phép quay Q có tâm quay O và phép quay φ. Với giá trị nào sau đây của φ, phép quay Q biến hình vuông ABCD thành chính nó ?

A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$. **B.** $\varphi = \frac{\pi}{4}$. **C.** $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **D.** $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Bài 38: Khẳng định "Nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng " là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 39: Cho hai tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Hãy xác định dạng của ΔGOG'.

A. Cân. B. Vuông. C. Vuông cân. D. Đều.

Bài 40: Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Có thể dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần hay không ?

A. Có. B. Không.

Bài 41: Trong mặt phẳng Oxy, đường thẳng (d): $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là:

A. $3x + 2y + 1 = 0$. C. $3x + 2y - 1 = 0$.

B. $-3x + 2y - 1 = 0$. D. $3x - 2y - 1 = 0$.

Bài 42: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(−1; 2) và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$. Tìm ảnh của A và d:

a. Qua phép đối xứng qua trục Oy.

A. A'(1; 2) và $3x - y - 1 = 0$. C. A'(2; 1) và $3x - y - 1 = 0$.

B. A'(1; 2) và $3x + y - 1 = 0$. D. A'(2; 1) và $3x + y - 1 = 0$.

b. Qua phép đối xứng qua gốc toạ độ.

A. A"(1; −2) và $3x - y - 1 = 0$. C. A"(−1; 2) và $3x - y - 1 = 0$.

B. A"(1; −2) và $3x + y - 1 = 0$. D. A"(−1; 2) và $3x + y - 1 = 0$.

Bài 43: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(−1; 3) và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$.

a. Tìm ảnh của A qua phép đối xứng tâm O.

A. A'(−1; −3). B. A'(−1; 3). C. A'(1; −3). D. A'(1; 3).

b. Tìm ảnh của d qua phép đối xứng tâm O.

A. $x + 2y + 3 = 0$. C. $x - 2y + 3 = 0$.

B. $x + 2y - 3 = 0$. D. $x - 2y - 3 = 0$.

Bài 44: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn tâm I(3; −2), bán kính 3. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I, 3) qua phép đối xứng qua gốc toạ độ.

A. $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$. C. $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

B. $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. D. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Bài 45: Cho ΔABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.

a. Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

b. Tìm quỹ tích điểm M_3.

Bài 46: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng (Δ): $Ax + By + C = 0$ và điểm I(a, b). Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng (Δ) thành đường thẳng (Δ'). Viết phương trình của (Δ').

A. (Δ'): $Ax + By + C - 2aA - 2bB = 0$.

B. (Δ'): $Ax - By + C - 2aA - 2bB = 0$.

C. (Δ'): $Ax - By - C - 2aA - 2bB = 0$.

D. (Δ'): $Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0$.

Bài 47: Cho ΔABC có các đỉnh được kí hiệu theo hướng ân, dựng ở ngoài tam giác ấy hai hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm cạnh AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm đoạn FH.

a. Xác định ảnh của hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BP}$ trong phép quay tâm B, góc 90^0.

b. Chứng minh rằng DF = 2BP và DF vuông góc với BP.

Bài 48: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF:

a. Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE.

A. ΔAOB. **B.** ΔCOD. **C.** ΔEOF. **D.** ΔBOC.

b. Qua phép quay tâm O góc quay 120^0.

A. ΔAOB. **B.** ΔBOC. **C.** ΔDOC. **D.** ΔEOD.

Bài 49: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(2; 0) và đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$.

a. Tìm ảnh của A qua phép quay tâm O góc 90^0.

A. A'(0; 2). **B.** A'(0; 3). **C.** A'(3; 0). **D.** A'(2; 0).

b. Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90^0.

A. $x + y + 2 = 0$. **C.** $x + y - 2 = 0$.

B. $x - y + 2 = 0$. **D.** $x - y - 2 = 0$.

Bài 50: Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm A(−1; 2) và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$.

a. Tìm ảnh của A qua phép quay tâm O góc quay 90^0.

A. A'(2; 1). **B.** A'(−2; −1). **C.** A'(−1; −2). **D.** A'(1; 2).

b. Tìm ảnh của d qua phép quay tâm O góc quay 90^0.

A. (d'): $x - 3y + 1 = 0$. **C.** (d'): $x + 3y + 1 = 0$.

B. (d'): $x - 3y - 1 = 0$. **D.** (d'): $x + 3y - 1 = 0$.

§ 5. HÌNH BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định lí: Nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau thì có phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

Định nghĩa: *Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia.*

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 51: Chứng tỏ rằng nếu ΔABC và $\Delta A'B'C'$ là hai tam giác bằng nhau thìcó phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

Bài 52: Khẳng định "Hai hình chữ nhật cùng kích thước thì bằng nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 53:

a. Khẳng định "Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Khẳng định "Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hai tứ giác có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau hay không ?

A. Có. **B.** Không.

Bài 54: Đa giác lồi n cạnh gọi là n–giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau. Chứng tỏ rằng hai n–giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cạnh bằng nhau.

Bài 55: Hình H_1 gồm ba đường tròn $(O_1\ ;\ r_1)$, $(O_2\ ;\ r_2)$, $(O_3\ ;\ r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình H_2 gồm ba đường tròn $(I_1;\ r_1)$, $(I_2;\ r_2)$, $(I_3;\ r_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Khẳng định hai hình H_1 và H_2 bằng nhau là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 56: Cho hai hình bình hành. Hãy chỉ ra một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

A. Đường thẳng đi qua hai tâm của hai hình bình hành.

B. Đường thẳng đi qua hai đỉnh của hai hình bình hành.

C. Đường thẳng đi tâm của hình bình hành thứ nhất và một đỉnh của hình bình hành còn lại.

D. Đường chéo của một trong hai hình bình hành đó.

Bài 57: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai parabol (P) và (P') lần lượt có phương trình $y = ax^2$ và $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khẳng định "Hai parabol đó bằng nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 58: Chứng minh rằng : Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm của tam giác A'B'C'.

Bài 59: Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO. Khẳng định "Hai hình thang AEJK và FOIC bằng nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 60: Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(−3; 2), B(−4; 5) và C(−1; 3).

a. Tìm ảnh của A, B, C qua phép quay tâm O góc -90^0.

A. A'(2; 3), B'(3; 1) và C'(5; 4). **C.** A'(5; 4), B'(2; 3) và C'(3; 1).

B. A'(2; 3), B'(5; 4) và C'(3; 1). **D.** A'(3; 1), B'(5; 4) và C'(2; 3).

b. Gọi $\Delta A_1B_1C_1$ là ảnh của ΔABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^0 và phép đối xứng qua trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của $\Delta A_1B_1C_1$.

A. $A_1(2; -3)$, $B_1(3; -1)$ và $C_1(5; -4)$.

B. $A_1(2; -3)$, $B_1(5; -4)$ và $C_1(3; -1)$.

C. $A_1(5; -4)$, $B_1(2; -3)$ và $C_1(3; -1)$.

D. $A_1(3; -1)$, $B_1(5; -4)$ và $C_1(2; -3)$.

§ 6. PHÉP VỊ TỰ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa: *Cho một điểm* O *cố định và một số* k *không đổi* $k \neq 0$. *Phép biến hình biến mỗi điểm* M *thành điểm* M' *sao cho* $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ *được gọi là phép vị tự tâm* O, *tỉ số* k.. Ký hiệu là V_O^k hoặc V(O; k).

2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N' thì: $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

Định lí 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

Hệ quả: Phép vị tự tỉ số k:

- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với $|k|$.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$.
- Biến góc thành góc bằng nó.

3. ẢNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN QUA PHÉP VỊ TỰ

Định lí 3: Phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn.

Tâm vị tự của hai đường tròn: Cho hai đường tròn $(I_1; R_1)$ và $(I_2; R_2)$ với $R_1 \neq R_2$. Có hai phép vị tự $V_{O_1}^k$ và $V_{O_1}^k$ biến $(I_1; R_1)$ thành $(I_2; R_2)$.

Hai tâm vị tự O_1, O_2 và tỉ số k được xác định như sau:

- $k = \pm\dfrac{R_1}{R_2}$ (k > 0 thì gọi là tâm vị tự ngoài, k < 0 thì gọi là tâm vị tự trong).
- O_1, O_2 ở trên đường thẳng I_1I_2 và $\dfrac{\overrightarrow{O_1I_2}}{\overrightarrow{O_1I_1}} = \dfrac{\overrightarrow{O_2I_2}}{\overrightarrow{O_2I_1}} = k$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 61: Các phép sau đây có phải là phép vị tự không ?

a. Phép đối xứng tâm.

A. Có. B. Không.

b. Phép đối xứng trục.

A. Có. B. Không.

c. Phép đồng nhất.

A. Có. B. Không.

d. Phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$

A. Có. B. Không.

Bài 62: Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a. Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

A. Đúng. B. Sai.

b. Phép vị tự không có thể có quá một điểm bất động.

A. Đúng. B. Sai.

c. Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 63: Cho hai đường thẳng song song d và d'. Có bao nhiêu phép vị tự với tỉ số k = 100 biến đường thẳng d thành đường thẳng d' ?

A. Không có phép nào.
B. Có duy nhất một phép.
C. Chỉ có hai phép.
D. Có rất nhiều phép.

Bài 64: Cho đường tròn (O ; R). Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

A. Có phép tịnh tiến biến (O ; R) thành chính nó.
B. Có hai phép vị tự biến (O ; R) thành chính nó.
C. Có phép đối xứng trục biến (O ; R) thành chính nó.
D. Trong ba mệnh đề trên có ít nhất một mệnh đề sai.

Bài 65: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

A. Tâm vị tự ngoài của hai đường tròn nằm ngoài đường tròn đó.
B. Tâm vị tự trong của hai đường tròn không nằm giữa hai tâm của hai đường tròn.
C. Tâm vị tự trong của hai đường tròn luôn thuộc đường thẳng nối tâm của hai đường tròn.
D. Tâm vị tự của hai đường tròn có thể là điểm chung của cả hai đường tròn.

Bài 66: Phép biến hình nào sau đây không có tính chất: "Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó"?

A. Phép tịnh tiến.
B. Phép đối xứng tâm.
C. Phép đối xứng trục.
D. Phép vị tự.

Bài 67: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai ?

A. . Phép dời hình là một phép đồng dạng.
B. Phép vị tự là một phép đồng dạng.
C. Phép đồng dạng là một phép dời hình.
D. Có phép vị tự không phải là một phép dời hình

Bài 68: Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình ?

A. Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng.

B. Phép đồng nhất. C. Phép vị tự tỉ số -1. D. Phép đối xứng trục.

Bài 69: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

A. Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

B. Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

C. Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

D. Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Bài 70: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào SAI ?

A. Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó.

B. Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó.

C. Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó.

D. Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

Bài 71: Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau; hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau; một đường tròn chứa đường tròn kia.

Bài 72: Gọi F là phép biến hình có tính chất sau: Với mọi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta luôn có $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, trong đó k là một số không đổi khác 0. Hãy chứng minh rằng F là phép tính tiến hoặc phép vị tự.

Bài 73: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

Bài 74: Cho đường tròn (O ; R) và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

Bài 75: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 76: Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi của (O) khác đường kính AB. Đường thẳng CQ cắt PA và PB lần lượt tại M và N.

a. Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b. Tìm quỹ tích các điểm M và N khi đường kính PQ thay đổi.

Bài 77: Cho đường tròn (O ; R) và điểm A cố định. Một dây cung BC thay đổi của (O ; R) có độ dài không đổi NC = m. Tìm quỹ tích các điểm G sao cho $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Bài 78: Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 79: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Một đường tròn (O') tiếp xúc với (O) và đoạn AB lần lượt tại C, D, cắt đường thẳng CD tại (O; R) tại I. Tính độ dài các đoạn thẳng AI và BI.

Bài 80: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

Bài 81: (Tr 29): Cho ΔABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của ΔABC qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$.

Bài 82:

a. Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O tỉ số k_1 và k_2 sẽ được một phép vị tự tâm O.

b. Tìm tâm tỉ cự của phép vị tự trong câu a).

A. k_1. **B.** k_2. **C.** $k_1.k_2$. **D.** $\frac{k_1}{k_2}$

§ 7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA PHÉP ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: *Phép biến hình* F *gọi là phép đồng dạng tỉ số* k (k > 0) *nếu với hai điểm* M *và* N *bất kì và ảnh* M' *và* N' *của chúng ta luôn có* M'N' = kMN.

Định lí: Mọi phép đồng dạng F tỉ số k (k > 0) đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.

Hệ quả: Phép đồng dạng tỉ số k:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.
- Biến đường thẳng thàng đường thẳng, biến tia thành tia.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng và độ dài được nhân lên với k.
- Biến góc thành góc bằng nó.

2. HAI HÌNH ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa: *Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.*

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Bài 83: Trong các mệnh đề sau đây, mênh đề nào sai ?

A. Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng.

B. Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.

C. Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng.

D. Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.

Bài 84: Chứng tỏ rằng nếu phép đồng dạng F biến ΔABC thành ΔA'B'C' thì trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC lần lượt biến thành trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp ΔA'B'C'..

Bài 85: Khẳng định "Các đa giác đều có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 86: Cho hình chữ nhật ABCD, AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC.

a. Khẳng định "Hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Tính tỉ số đồng dạng.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 2.

Bài 87: Trong mặt phẳng Oxy cho điểm I (1; 1) và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 45^0 và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$.

A. $x^2 + (y - 2)^2 = 8$. **C.** $x^2 + (y - 2)^2 = 4$.

B. $x^2 + (y - 2)^2 = 6$. **D.** $x^2 + (y - 2)^2 = 2$.

Bài 88: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(1; –3), bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

A. $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 36$. **C.** $(x + 3)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

B. $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 18$. **D.** $(x - 3)^2 + (y + 9)^2 = 18$.

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

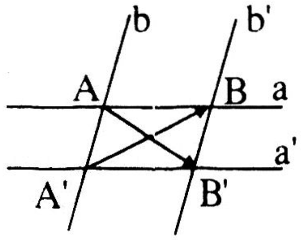
Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Thật vậy, ta có:

$$M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{v} \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M').$$

Bài 2: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Mọi phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AA'}$ với $A \in d$ và $A' \in d'$ đều biến đường thẳng d thành d'.



Bài 3: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta nhận thấy:

- Gọi $\{A\} = a \cap b$ thì vì $a // a'$ nên $a' \cap b = \{A'\}$.
- Gọi $\{B\} = a \cap b'$ thì vì $a // a'$ nên $a' \cap b' = \{B'\}$.

Khi đó: ▪ Với phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB'}}$ biến a, b theo thứ tự thành a' và b'.

▪ Với phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{A'B}}$ biến a, b theo thứ tự thành a' và b'.

Vậy, tồn tại hai phép tịnh tiến biến đường thẳng a và b lần lượt thành các đường thẳng a' và b'.

Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). B; c). D.

a. d trùng d' khi d song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

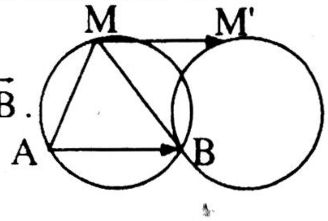
b. d song song với d' khi d không song song với giá của vectơ $\vec{u}$.

c. d và d' không bao giờ cắt nhau.

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Đặt $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$, ta có nhận xét: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$

Vậy, phép biến hình biến M thành M'' là một phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{a}$.



Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, ta có: $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.

Tức là M' là ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vậy, quỹ tích điểm M' là đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). A; d). A; e). A; f). A.

a. Ta có: $M'(x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha + a;\ x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha + b)$,

b. Ta có: $N'(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha + a;\ x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha + b)$,

c. Ta có: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (1)

d. Ta có: $(d')^2 = (M'N')^2 = [(x_2.\cos\alpha - y_2.\sin\alpha) - (x_1.\cos\alpha - y_1.\sin\alpha)]^2 +$

$+ [(x_2.\sin\alpha + y_2.\cos\alpha) - (x_1.\sin\alpha + y_1.\cos\alpha)]^2$

$= [(x_2 - x_1).\cos\alpha - (y_2 - y_1).\sin\alpha]^2 +$

$+ [(x_2 - x_1).\sin\alpha + (y_2 - y_1).\cos\alpha]^2$

$= (x_2 - x_1)^2.\cos^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\sin^2\alpha +$

$+ (x_2 - x_1)^2.\sin^2\alpha + (y_2 - y_1)^2.\cos^2\alpha$

$= (x_2 - x_1)^2.(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (y_2 - y_1)^2.(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\Leftrightarrow d' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (2)

e. Từ (1) và (2) suy ra d = d' (hay MN = M'N').

Vậy, phép biến hình F bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì nên theo định nghĩa nó là một phép dời hình.

f. Với $\alpha = 0$, ta thấy: $\begin{cases} x' = x\cos 0 - y\sin 0 + a \\ y' = x\sin 0 + y\cos 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow$ F là phép tịnh tiến.

Bài 8:

a. Phép biến hình F_1 biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(y_1; -x_1)$, $N'(y_2; -x_2)$.

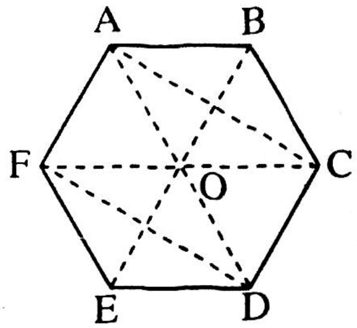
Khi đó, ta có: $M'N' = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (-x_2 + x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = MN$.

Vậy, F_1 là một phép dời hình.

b. Phép biến hình F_2 biến hai điểm $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ thành hai điểm $M'(2x_1; y_1)$, $N'(2x_2; y_2)$.

Khi đó, ta có: $M'N' = \sqrt{(2x_2 - 2x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{4(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \neq MN$.

Vậy, F_2 không là một phép dời hình.



Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta có:

$T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$; $T_{\overrightarrow{AB}}(O) = C$; $T_{\overrightarrow{AB}}(F) = O$

Do đó $T_{\overrightarrow{AB}}(\Delta AOF) = \Delta BCO$.

Bài 10: Thực hiện phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}: D \mapsto E$.

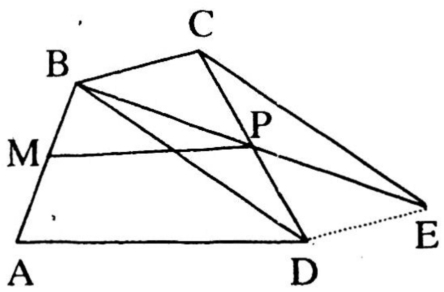
Khi đó tứ giác BCED là hình bình hành, vì P là trung điểm của CD nên P cũng là trung điểm của BE.

Do đó ta có: $MP = \frac{1}{2}AE \leq \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC)$. (1)

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi: A, D, E thẳng hàng $\Leftrightarrow$ AD // BC.

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$NQ \le \frac{1}{2}(AB + CD)$. (2)



Dấu bằng chỉ xảy ra $\Leftrightarrow AB // CD$

Cộng theo vế (1), (2), ta được:

$$MP + NQ \le \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA). \quad (3)$$

Vậy để có (*) thì dấu " = " xảy ra ở (3) $\Leftrightarrow$ dấu " = " xảy ra tại (1) và (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ BC // AD \end{cases} \Leftrightarrow \text{ABCD là hình bình hành.}$$

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta biết rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(a; b)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -3 + 2 = -1 \\ y' = 2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow M'(-1; 1).$$

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Để phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì vectơ $\vec{v}$ phải có giá song song với đường thẳng d.

Nhận xét rằng đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a}(1; 2)$.

Do đó, chúng ta chọn đáp án C.

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Điểm A thành điểm A'(1; 3).

b. Đường thẳng d thành đường thẳng d' có phương trình được xác định bằng cách: Mỗi điểm M(x, y) ∈ (d) là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc (d) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(2; 1)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ x - x_0 = 2 \\ y - y_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ x_0 = x - 2 \\ y_0 = y - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(x - 2) + (y - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 6 = 0. \quad (1)$$

Phương trình (1) chính là phương trình của (d').

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C; d). D.

Lời giải tự luận: Chúng ta biết rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-1; 2)$ biến điểm M(x; y) thành điểm M'(x'; y') với:

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}.$$

a. Với A'(x'; y') thì: $\begin{cases} x' = x_A - 1 = 3 - 1 = 2 \\ y' = y_A + 2 = 5 + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7).$

b. Với B'(x'; y') thì: $\begin{cases} x' = x_B - 1 = -1 - 1 = -2 \\ y' = y_B + 2 = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow B'(-2; 3).$

c. Giả sử $C(x_C; y_C)$ thì: $\begin{cases} x_A = x_C - 1 \\ y_A = y_C + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(4; 3).$

d. Mỗi điểm $M(x, y) \in (d')$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (d)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-1; 2)$, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ \overrightarrow{M_0M} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 + 3 = 0 \\ x - x_0 = -1 \\ y - y_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 + 3 = 0 \\ x_0 = x + 1 \\ y_0 = y - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x + 1) - 2(y - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 8 = 0. \quad (*)$$

Phương trình (*) chính là phương trình của (d').

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta có ngay: $(I, 3)$: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.

b. Với phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}(-2; 1)$ thì:

$T_{\vec{v}}((I, 3)) = (I_1, 3)$ với $\overrightarrow{II_1} = \vec{v} \Rightarrow I_1(1; -1)$.

Từ đó suy ra: $(I_1, 3)$: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Từ giả thiết, ta có: $g(x) = f(x + a) + b$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = [(x + a)^3 + 3(x + a) + 1] + b$$
$$= x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 + 1)x + a^3 + 3a + 1 + b.$$

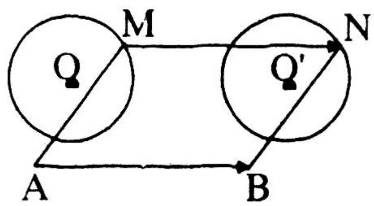
suy ra: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy, ta được $g(x) = f(x - 1) + 2$, tức là có vectơ $\vec{v}(-1; 2)$.

Bài 18: Từ hình bình hành MABN, ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow N = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$.

Từ giả thiết M chạy trên (O), suy ra:

$N \in (O') = T_{\overrightarrow{AB}}((O))$.



Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Đó chính là hai đường phân giác của góc tạo bởi d và d'.

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Với hình vuông ABCD sẽ có bốn trục đối xứng, đó là:

- Hai đường chéo AC và BD.
- Hai đường thẳng a và b đi qua tâm và vuông góc với các cạnh đối diện.

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Hình vuông có 4 trục đối xứng, bao gồm:

- Hai đường chéo.
- Hai đường thẳng theo thứ tự đi qua trung điểm hai cạnh đối diện.

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Mỗi điểm M'(x, y) ∈ (d') là ảnh của một điểm $M(x_0, y_0)$ ∈ (d) qua phép đối xứng trục Ox, ta có: $\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ x = x_0 \\ y = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 2y_0 + 1 = 0 \\ x_0 = x \\ y_0 = -y \end{cases}$

$\Rightarrow 3x + 2y + 1 = 0$. (*). Phương trình (*) chính là phương trình của (d').

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: (Lấy phương pháp từ bài tập 1): Lấy hai điểm A(0; 2) và B(1; 5) thuộc (d), khi đó ta lần lượt có:

- $Đ_{Ox}(A) = A'(0; 2)$; $Đ_{Ox}(B) = B'(-1; 5)$.
- $Đ_{Ox}(d) = (d')$ đi qua hai điểm A' và B', tức là:

$$(d'): \begin{cases} \text{qua } A'(0;2) \\ \text{qua } B'(-1;5) \end{cases} \Leftrightarrow (d'): \frac{x}{-1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow (d'): 3x + y - 2 = 0.$$

Cách 2: Mỗi điểm M'(x, y) ∈ (d') là ảnh của một điểm $M(x_0, y_0)$ ∈ (d) qua phép đối xứng trục Oy, ta có: $\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ x = -x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - y_0 + 2 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases}$

$\Rightarrow 3x + y - 2 = 0$. (*). Phương trình (*) chính là phương trình của (d').

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Mỗi điểm M(x, y)∈(C_1') là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0)$ ∈ (C_1) qua phép đối xứng có trục Oy, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (C_1) \\ \text{Oy là trung trực của } M_0M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 4x_0 + 5y_0 + 1 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases}$$

$\Rightarrow (-x)^2 + y^2 - 4(-x) + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$ (*)

Phương trình (*) chính là phương trình của (C_1').

Cách 2: Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(2; -\frac{5}{2})$ và bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

Đường tròn (C_1') đối xứng với đường tròn (C_1) qua Oy có:

$$\begin{cases} \text{tâm } I_1'(-2; -\frac{5}{2}) \\ \text{bán kính } R_1' = \frac{\sqrt{37}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow (C_1'): (x + 2)^2 + (y + \frac{5}{2})^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow (C_1'): x^2 + y^2 + 4x + 5y + 1 = 0.$

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Mỗi điểm $M(x, y) \in (C_2')$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0) \in (C_2)$ qua phép đối xứng có trục Oy, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (C_2) \\ \text{Oy là trung trực của } M_0M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + 10y_0 - 5 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow (-x)^2 + y^2 + 10y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0. \qquad (**)$$

Phương trình (**) chính là phương trình của (C_2').

Cách 2: Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(0; -5)$ và bán kính $R_2 = \sqrt{30}$.

Đường tròn (C_2') đối xứng với đường tròn (C_2) qua Oy có:

$$\begin{cases} \text{tâm } I_2'(0; -5) \\ \text{bán kính } R_2' = \sqrt{30} \end{cases} \Leftrightarrow (C_2'): x^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{30})^2$$

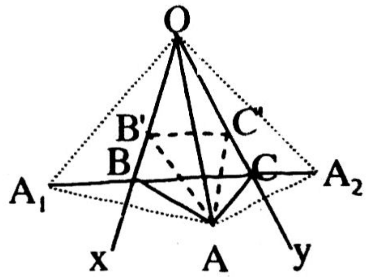
$$\Leftrightarrow (C_2'): x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0.$$

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C; c). C.

Ta lần lượt có:
- $Đ_{Ox}(A) = A'(1; 2)$.
- $Đ_{Ox}(B) = B'(3; -1)$.
- $Đ_{Ox}(AB) = (A'B')$ đi hai qua điểm A' và B', tức là:

$$(A'B'): \begin{cases} \text{qua } A'(1;2) \\ \text{qua } B'(3;-1) \end{cases} \Leftrightarrow (A'B'): \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow (A'B'): 3x + 2y - 7 = 0.$$

Bài 28: Trước tiên:



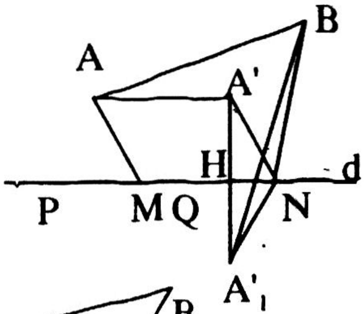
- Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox.
- Gọi A_2 là điểm đối xứng với A qua Oy.
- Nối A_1A_2 cắt Ox, Oy theo thứ tự tại B và C.

Ta sẽ đi chứng minh ΔABC có chu vi nhỏ nhất.

Thật vậy: $CV_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = A_1B + BC + CA_2$

$$= A_1A_2 \ge A_1B' + B'C' + C'A_2 = AB' + B'C' + C'A = CV_{\Delta AB'C'}$$

Bài 29: Giả sử xác định được hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN bé nhất. Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{PQ}$, ta được:



$$T_{\overrightarrow{PQ}}(A) = A'; \; T_{\overrightarrow{PQ}}(M) = N$$

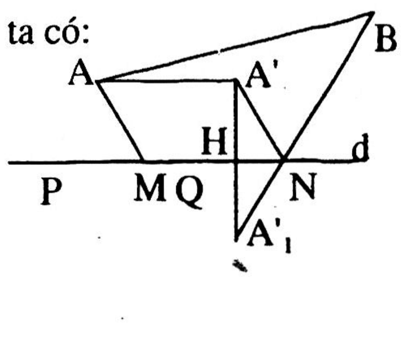
suy ra: AM = A'N và AM + BN = A'N + BN.

Tới đây, bài toán được chuyển về việc tìm điểm N thuộc d để A'N + BN bé nhất.

Gọi A'_1 là điểm đối xứng với A' qua (d), ta có:

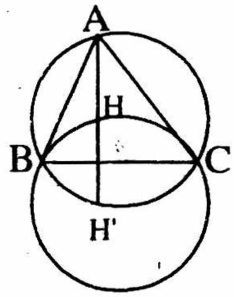
$$A'N + BN = A'_1N + BN \ge A'_1B.$$

Vậy, ta được: $(A'_1N + BN)_{Min} = A'_1B$, đạt được khi A'_1, N, B thẳng hàng.



Tới đây, chúng ta có cách dựng:

- Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{PQ}$, ta được $T_{\overrightarrow{PQ}}(A) = A'$.
- Lấy điểm A'_1 là điểm đối xứng với A' qua (d).
- Nối A'_1B cắt d tại N.
- Thực hiện phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{QP}$, ta được $T_{\overrightarrow{QP}}(N) = M$.



Bài 30: Giả sử AH cắt đường tròn tại H'.

Ta có: $H'CB = H'AB = HCB \Rightarrow \Delta H'CH$ cân tại C

$\Rightarrow$ BC là đường trung trực của H'H $\Rightarrow H = Đ_{BC}(H')$.

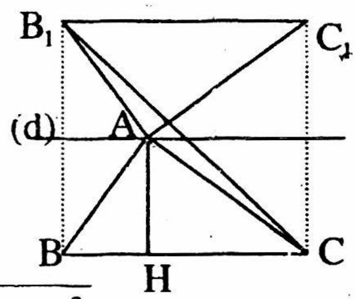
Và vì $H' \in (O)$ nên $H \in Đ_{BC}((O))$.

Bài 31:

a. Thực hiện phép đối xứng trục $Đ_d$, ta có: $Đ_d((O)) = (O_1)$.

Khi đó:
- Xác định giao điểm M của (O') với (O).
- Xác định điểm N là điểm đối xứng với M qua d.

Bài 32: Dựng đường thẳng (d) qua A song song cới BC.



Gọi B_1, C_1 lần lượt là điểm đối xứng của B, C qua đường thẳng (d), ta có:

$AC_1 = AC = b$, $AB_1 = AB = c$

$BB_1 = CC_1 = 2AH = 2h_a$,

$BB' \perp BC$.

Xét ΔAB_1C, ta có:

$$AB_1 + AC \geq B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} \Leftrightarrow b + c \geq \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$$

$$\Leftrightarrow h_a^2 \leq \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2] = p(p-a) \Leftrightarrow h_a \leq \sqrt{p(p-a)}, \text{ đpcm.}$$

Nhận xét: Trong lời giải trên để chứng minh tính chất $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$ chúng ta đã sử dụng một phép đối xứng trục (d), tuy nhiên điều đáng phải minh hoạ được ở đây là tại sao lại chọn trục (d) như vậy, điều này có thể được lý giải sơ lược như sau:

- Việc lựa chọn phép đối xứng trục (d) sẽ nhận được phần tử trung gian quan trọng là B_1C, phần tử này được biểu diễn thông qua b và c hoặc qua a và h_a, từ đó nhận được mối liên hệ giữa a, b, c và h_a.
- Các em học sinh hãy trả lời thêm câu hỏi "*Có tồn tại phép đối xứng trục khác* (d) *không và nếu có thì tính chất của phép đối xứng đó là gì ?*"

Bài 33:

a. Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là điểm đối xứng của H qua các cạnh BC, CA, AB.

- Xét phép đối xứng trục BC, ta được: $S_{(BC)}: \widehat{BHC} \mapsto \widehat{BH_1C} \Rightarrow \widehat{BH_1C} = \widehat{BHC}$.

  Vì: $\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{BH_1C} + \widehat{BAC} = 180^0$

  $\Rightarrow$ tứ giác ABH_1C nội tiếp được $\Rightarrow H_1 \in (O, R)$.
- Chứng minh tương tự, ta được: $H_2 \in (O, R)$, $H_3 \in (O, R)$.

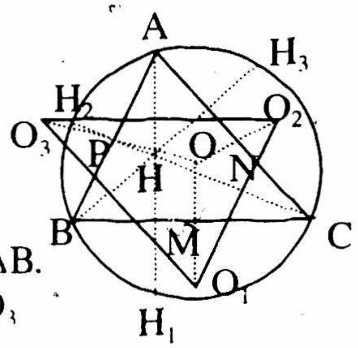
Ta có:

$S_{(BC)}[(HBC)] = (H_1BC) = (O, R)$

$S_{(CA)}[(HCA)] = (H_2CA) = (O, R)$

$S_{(AB)}[(HAB)] = (H_3AB) = (O, R)$

$\Rightarrow (HBC) = (HCA) = (HAB) = (O,R)$, đpcm



b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Ta có ngay: $S_{(BC)}: O \mapsto O_1$; $S_{(CA)}: O \mapsto O_2$; $S_{(AB)}: O \mapsto O_3$

Suy ra: $\overrightarrow{O_1O_2} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow O_1O_2 = BA$,

$\overrightarrow{O_2O_3} = 2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow O_2O_3 = CB$,

$\overrightarrow{O_3O_1} = 2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow O_3O_1 = AC$,

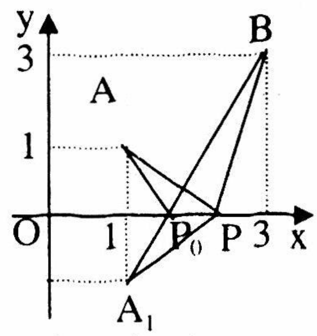
$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta O_1O_2O_3$, đpcm.

Bài 34: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

Lời giải tự luận: Gọi A_1 là điểm đối xứng với A qua Ox suy ra $A_1(1; -1)$.

Gọi $P_0 = (A_1B) \cap Ox$, suy ra $P_0(x; 0)$, A, B thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AP_0} \,//\, \overrightarrow{AB} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow P_0(\frac{3}{2}; 0).$$



Ta có $PA + PB = PA_1 + PB \geq A_1B$.

Vậy, ta thấy:

$$(PA + PB)_{Min} = A_1B = \sqrt{(3-1)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5},$$

đạt được khi: A_1, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow P \equiv P_0(\frac{3}{2}; 0)$.

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số $\Leftrightarrow$ các đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ (có dạng $y = -x + m$) nếu cắt đồ thị tại A và B thì trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $y = x + 2$.

Hoành độ giao điểm A, B là các nghiệm của phương trình:

$$\frac{x-1}{x+1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 - (m-2)x - 1 - m = 0 \qquad (1)$$

Giả sử x_A, x_B là các nghiệm của (1) thì: $\begin{cases} x_A + x_B = m - 2 \\ x_A x_B = -m - 1 \end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của AB, ta có: I: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = -x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow$ I: $\begin{cases} x_I = \dfrac{m-2}{2} \\ y_I = \dfrac{m+2}{2} \end{cases}$.

Thay toạ độ của I vào phương trình đường thẳng $y = x + 2$, ta được:

$$\frac{m+2}{2} = \frac{m-2}{2} + 2 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (luôn đúng)} \Leftrightarrow \text{I thuộc đường thẳng } y = x + 2$$

Vậy, đường thẳng $y = x + 2$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Bởi một tam giác đều thì không có tâm đối xứng.

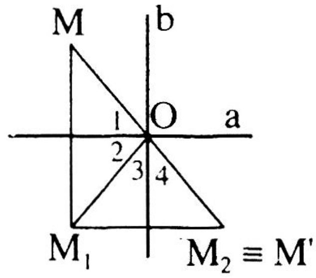
Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Với phép quay $Q_O^{\frac{\pi}{2}}(ABCD) = DABC$.

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Gọi O là giao điểm của hai trục đối xứng a và b của hình (**H**).

Với điểm M bất kì thuộc (**H**), ta có:



$Đ_a(M) = M_1 \Rightarrow OM = OM_1$ và $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$,

$Đ_b(M_1) = M_2 \Rightarrow OM_1 = OM_2$ và $\widehat{O}_3 = \widehat{O}_4$,

Do đó: $\begin{cases} OM = OM_2 \\ \widehat{MOM_2} = 180^0 \end{cases} \Rightarrow M_2 = Đ_O(M)$.

Vậy, nếu một hình nào đó có hai trục đối xứng vuông góc với nhau thì hình đó có tâm đối xứng.

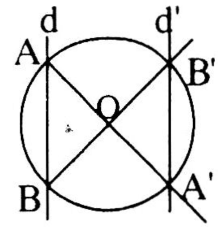
Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Xét phép quay Q tâm O góc quay 90^0, ta có ngay:

$$\Delta OBB' = Q_O^{90^0}(\Delta OAA') \Rightarrow G' = Q_O^{90^0}(G) \Rightarrow \widehat{GOG'} = 90^0 \text{ và } OG' = OG.$$

Vậy, ta được $\Delta GOG'$ là tam giác vuông cân.

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* A.



Lời giải tự luận: Có thể thực hiện được, cụ thể:

- Lấy điểm A trên d, dùng thước thẳng dựng tia AO.
- Dùng compa dựng đường tròn (O; OA), đường tròn này cắt đường thẳng d tại B và tia AO tại A'.
- Dùng thước thẳng dựng tia BO cắt đường tròn tại B'.
- Dùng thước thẳng nối A' với B' ta được đường thẳng d' cần dựng.

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Mỗi điểm $M'(x, y) \in (d')$ là ảnh của một điểm $M(x_0, y_0) \in (d)$ qua phép đối xứng tâm O, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ x = -x_0 \\ y = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = -y \end{cases} \Rightarrow 3(-x) - 2(-y) - 1 = 0$$

$\Rightarrow -3x + 2y - 1 = 0.$ (*)

Phương trình (*) chính là phương trình của (d').

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Với phép đối xứng qua trục Oy.

- Điểm A thành điểm A'(1; 2).

- Đường thẳng d thành đường thẳng d_2 có phương trình được xác định bằng cách: Mỗi điểm $M(x, y) \in (d_2)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc (d) qua phép đối xứng qua trục Oy, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(-x) + y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0. \quad (2)$$

Phương trình (2) chính là phương trình của (d_2).

b. Với phép đối xứng qua gốc toạ độ.

- Điểm A thành điểm A''(1; −2).
- Đường thẳng d thành đường thẳng d_3 có phương trình được xác định bằng cách: Mỗi điểm $M(x, y) \in (d_3)$ là ảnh của một điểm $M_0(x_0, y_0)$ thuộc (d) qua phép đối xứng qua gốc toạ độ, ta có:

$$\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ x_0 = -x \\ y_0 = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 + y_0 + 1 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(-x) + (-y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + y - 1 = 0. \quad (3)$$

Phương trình (3) chính là phương trình của (d_3).

Bài 43: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). D.

a. Với điểm A(−1; 3) thì $Đ_O(A) = A'(1; -3)$.

b. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Lấy hai điểm A(−3; 0) và B(1; 2) thuộc (d), khi đó ta lần lượt có:

- $Đ_O(A) = A'(3; 0)$.
- $Đ_O(B) = B'(-1; -2)$.
- $Đ_O(d) = (d')$ đi qua hai điểm A' và B', tức là: (d'): $\begin{cases} \text{qua } A'(3;0) \\ \text{qua } B'(-1;-2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (d'): \frac{x-3}{-1-3} = \frac{y}{-2} \Leftrightarrow (d'): 2x - 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow (d'): x - 2y - 3 = 0.$$

Cách 2: Mỗi điểm $M'(x, y) \in (d')$ là ảnh của một điểm $M(x_0, y_0) \in (d)$ qua phép đối xứng tâm O, ta có: $\begin{cases} M_0(x_0, y_0) \in (d) \\ x = -x_0 \\ y = -y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2y_0 + 3 = 0 \\ x_0 = -x \\ y_0 = -y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (-x) - 2(-y) + 3 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0. \quad (*)$$

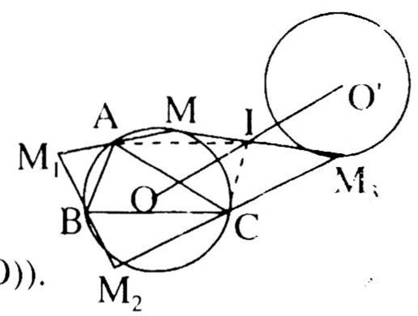
Phương trình (*) chính là phương trình của (d').

Bài 44: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Với phép đối xứng qua gốc O thì: $Đ_O((I, 3)) = (I_3, 3)$ với $I_3(-3\ 2)$.

Từ đó suy ra: $(I_3, 3): (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

Bài 45:



a. Gọi I là trung điểm MM_3, ta có:

ABCI là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ I cố định.

Vậy F là phép đối xứng tâm I.

b. Vì: $M_3 = Đ_I(M)$ và $M \in (O) \Rightarrow M_3 \in (O') = Đ_I((O))$.

Bài 46: *Đáp số trắc nghiệm* D.

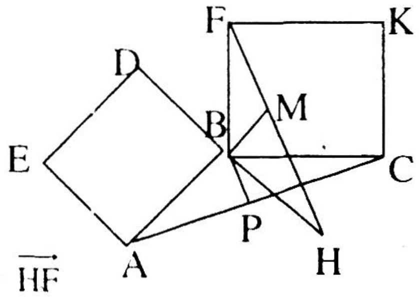
Lời giải tự luận: Với mỗi điểm $M(x_0; y_0) \in (\Delta)$ (tức là $Ax_0 + By_0 + C = 0$), suy ra tồn tại điểm $M'(x; y) \in (\Delta')$ sao cho:

$$\begin{cases} x = 2a - x_0 \\ y = 2b - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2a - x \\ y_0 = 2b - y \end{cases}.$$

Do đó, đường thẳng (Δ') sẽ có phương trình:

(Δ'): $A(2a - x) + B(2b - y) + C = 0 \Leftrightarrow (\Delta')$: $Ax + By - C - 2aA - 2bB = 0$.

Bài 47:



a. Ta có: $\begin{cases} BA = BH \text{ (cùng bằng BD)} \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BH}) = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow Q_B^{90^0}(A) = H$ & $Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BH}$

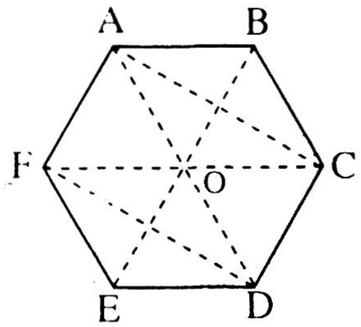
Vì $Q_B^{90^0}(A) = H$, $Q_B^{90^0}(C) = F$ nên $Q_B^{90^0}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HF}$

b. Vì P là trung điểm của AC nên theo tính chất của phép quay ta có ảnh của P qua phép quay trên trung ddiểm M của HF.

Do đó: $Q_B^{90^0}(\overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \begin{cases} BP = BM \\ BP \perp BM \end{cases}$.

Mặt khác: $BM = \frac{1}{2}DE$ và BM // DF $\Rightarrow BP = \frac{1}{2}DF$ và $DF \perp BP$.

Bài 48: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). D.



a. Ta có: $Đ_{BE}(A) = C$; $Đ_{BE}(O) = O$; $Đ_{BE}(F) = D$

Do đó $Đ_{BE}(\Delta AOF) = \Delta COD$.

b. Ta có: $Q_O^{120^0}(A) = E$; $Q_O^{120^0}(O) = O$; $Q_O^{120^0}(F) = D$

Do đó $Q_O^{120^0}(\Delta AOF) = \Delta EOD$.

Bài 49: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

a. Vì $A(2; 0) \in Ox$ nên: $Q_O^{90^0}(A) = A'$: $\begin{cases} A' \in Oy \\ OA = OA' \end{cases} \Rightarrow A'(0; 2)$.

b. Nhận xét rằng $(d) \cap Ox = \{A\}$, do đó: $Q_O^{90^0}(d) = (d')$: $\begin{cases} \text{đi qua } A' \\ (d') \perp (d) \end{cases}$.

Ta lần lượt thấy:

- (d') vuông góc với (d) nên (d') có phương trình: (d'): $x - y + C = 0$.

- (d') đi qua A' nên: $0 - 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 2$.

Từ đó, ta nhận được (d'): $x - y + 2 = 0$.

Bài 50: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

a. Với phép quay tâm O góc quay 90^0 điểm A thành điểm A'(x; y) có toạ độ thoả mãn:
$$\begin{cases} OA = OA_4 \\ (OA, OA') = 90^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^2 + 2^2 = x^2 + y^2 \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ \& \ y = 1 \\ x = -2 \ \& \ y = -1 \end{array}\right. \overset{\alpha = 90^0}{\Rightarrow} A'(-2; -1).$$

b. Đường thẳng d thành đường thẳng d' có phương trình được xác định bằng cách nhận xét rằng $A \in (d)$, do đó:
$$Q_O^{90^0}(d) = (d'): \begin{cases} \text{đi qua } A' \\ (d') \perp (d) \end{cases}.$$

Ta lần lượt thấy:

- (d') vuông góc với (d) nên (d') có phương trình: (d'): $x - 3y + C = 0$.
- (d') đi qua A' nên: $-2 - 3(-1) + C = 0 \Leftrightarrow C = -1$.

Từ đó, ta nhận được (d'): $x - 3y - 1 = 0$.

Bài 51: Gọi F là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho nếu $\overrightarrow{CM} = p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB}$ $(p, q \in \mathbf{R})$ thì $\overrightarrow{C'M'} = p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'}$. Ta đi chứng minh F là một phép dời hình cần tìm.

Thật vậy, với điểm N và F biến N thành N', tức là nếu $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}$ $(k, l \in \mathbf{R})$ thì $\overrightarrow{C'N'} = k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}$.

Khi đó, ta lần lượt có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = (k\overrightarrow{CA} + l\overrightarrow{CB}) - (p\overrightarrow{CA} + q\overrightarrow{CB})$
$$= (k - p)\overrightarrow{CA} + (l - q)\overrightarrow{CB}$$
$$MN^2 = (\overrightarrow{MN})^2 = [(k - p)\overrightarrow{CA} + (l - q)\overrightarrow{CB}]^2$$
$$= (k - p)CA^2 + (l - q)^2CB^2 + 2(k - p)(l - q)\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB}. \quad (1)$$
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{C'N'} - \overrightarrow{C'M'} = (k\overrightarrow{C'A'} + l\overrightarrow{C'B'}) - (p\overrightarrow{C'A'} + q\overrightarrow{C'B'})$$
$$= (k - p)\overrightarrow{C'A'} + (l - q)\overrightarrow{C'B'}$$
$$(M'N')^2 = (\overrightarrow{M'N'})^2 = [(k - p)\overrightarrow{C'A'} + (l - q)\overrightarrow{C'B'}]^2$$
$$= (k - p)C'A'^2 + (l - q)^2C'B'^2 + 2(k - p)(l - q)\overrightarrow{C'A'}\,\overrightarrow{C'B'}. \quad (2)$$

Với giả thiết $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (nên $CA = C'A'$, $CB = C'B'$ và $\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'A'}\,\overrightarrow{C'B'}$) nên từ (1) và (2) suy ra:

$MN = M'N' \Leftrightarrow$ F là một phép dời hình.

Mặt khác, ta nhận thấy phép dời hình F biến A, B, C lần lượt thành A', B', C', tức là biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.

Bài 52: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Giả sử hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B' và BC = B'C'.

Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D'.

Ta có: $\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$. Vậy, ta được: $A'B'C'D' = f(ABCD)$

$\Rightarrow$ hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

Bài 53: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). B.

a. Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'.

Giả sử AC = A'C', ta có: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$. Vậy, ta được: $A'B'C'D' = f(ABCD)$

$\Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

b. Giả sử hai đường chéo của hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' cắt nhau theo thứ tự tại O và O'.

Giả sử $\widehat{A} = \widehat{A'}$, ta có: $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (c.g.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta A'B'C' = f(\Delta ABC)$

$\Rightarrow A'O' = f(AO) \Rightarrow D' = f(D)$. Vậy, ta được: $A'B'C'D' = f(ABCD)$

$\Rightarrow$ hai hình tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

c. Không thể, bởi hình thoi ABCD cạnh a không thể bằng hình vuông A'B'C'D' cạnh a.

Bài 54:

Gọi O, O' theo thứ tự là tâm của hai n–giác đều (**H**), (**H'**), và A, A' là hai đỉnh của hai n–giác đều đó. Nhận xét rằng:

$$Q_{O'}^{(OA,O'A')}(T_{\overrightarrow{OO'}}(\mathbf{H})) = (\mathbf{H'}) \Rightarrow (\mathbf{H}) = (\mathbf{H'}).$$

Bài 55: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Xét hai tam giác $O_1O_2O_3$ và $I_1I_2I_3$, ta có:

$$O_1O_2 = r_1 + r_2 = I_1I_2,\ O_2O_3 = r_2 + r_3 = I_2I_3,\ O_3O_1 = r_3 + r_1 = I_3I_1,$$

Suy ra: $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (c.c.c)

$\Rightarrow$ tồn tại một phép dời hình f để $\Delta O_1O_2O_3 = f(\Delta I_1I_2I_3) \Rightarrow (\mathbf{H_1}) = f(\mathbf{H_2})$

Vậy, hai hình $\mathbf{H_1}$ và $\mathbf{H_2}$ bằng nhau.

Bài 56: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 57: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Viết lại phương trình parabol (P') dưới dạng:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{\Delta}{4a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Như vậy, tồn tại phép tịnh tiến T theo vectơ $\vec{v}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ để (P') = T(P).

Vậy, hai parabol (P) và (P') bằng nhau.

Bài 58: Gọi M là trung điểm của đoạn BC và G là trọng tâm ΔABC. Giả sử:

F(M) = M' và F(G) = G'.

Từ tính chất của phép dời hình, ta suy ra:

M' là trung điểm của B'C' $\Rightarrow$ A'M' là trung tuyến. (1)

$$\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{2}{3}. \quad (2)$$

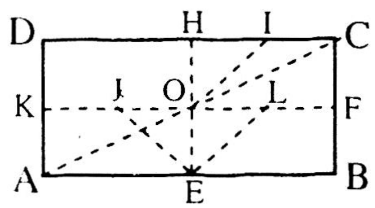
Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

Bài 59: Để chứng tỏ AEJK = FOIC ta cần đi chứng minh tồn tại một phép dời hình $\mathcal{F}$ (là hợp của những phép dời hình đã biết) sao cho $\mathcal{F}$(AEJK) = FOIC.

Gọi L là trung điểm OF, ta nhận xét rằng:

$Đ_{HE}$(AEJK) = BELF,

$T_{\overrightarrow{EO}}$(BELF) = FOIC,



Từ đó suy ra:

$T_{\overrightarrow{EO}}(Đ_{HE}$(AEJK)) = FOIC $\Rightarrow$ AEJK = FOIC

Bài 60: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

a. Từ định nghĩa: $Q_O^{\alpha}(M) = M': \begin{cases} OM = OM' \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases}$

Ta lần lượt nhận thấy:

- Vì A $\in$ P(II) và A' $\in$ P(I) nên góc quay $\alpha < 0$.

  Mặt khác: $\overrightarrow{OA}(-3; 2) \Rightarrow OA = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$,

  $\overrightarrow{OA'}(2; 3) \Rightarrow OA' = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$,

  Từ đó, suy ra: OA = OA'

  $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = (-3).2 + 2.3 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = 90^0$.

  Vậy, ta có kết luận $Q_O^{90^0}(A) = A'$.

- Vì B $\in$ P(II) và B' $\in$ P(I) nên góc quay $\alpha < 0$.

  Mặt khác: $\overrightarrow{OB}(-4; 5) \Rightarrow OB = \sqrt{(-4)^2 + 5^2} = \sqrt{41}$,

  $\overrightarrow{OB'}(5; 4) \Rightarrow OB' = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$,

  Từ đó, suy ra: OB = OB'

  $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB'} = (-4).5 + 5.4 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = 90^0$.

  Vậy, ta có kết luận $Q_O^{-90^0}(B) = B'$.

- Vì $C \in P(II)$ và $C' \in P(I)$ nên góc quay $\alpha < 0$.

Mặt khác: $\overrightarrow{OC}(-1; 3) \Rightarrow OC = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

$\overrightarrow{OC'}(3; 1) \Rightarrow OC' = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$,

Từ đó, suy ra: $OC = OC'$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC'} = (-1).3 + 3.1 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OC'}) = 90^0$

Vậy, ta có kết luận $Q_O^{-90^0}(C) = C'$.

b. Ta lần lượt có: - $Q_O^{-90^0}(\Delta ABC) = \Delta A'B'C'$.

- $\Delta A_1B_1C_1 = Đ_{Ox}(\Delta A'B'C')$ nên:

$A_1 = Đ_{Ox}(A') \Rightarrow A_1(2; -3)$,

$B_1 = Đ_{Ox}(B') \Rightarrow B_1(5; -4)$,

$C_1 = Đ_{Ox}(C') \Rightarrow C_1(3; -1)$.

Bài 61: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). A; d). B.

Bài 62: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). A.

Bài 63: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 64: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 65: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 66: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 67: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 68: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

- Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng không bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm nên nó không phải là phép dời hình.
- Phép đồng nhất và phép đối xứng trục là phép dời hình.
- Phép vị tự tỉ số -1 thực chất là phép đối xứng tâm nên nó là phép dời hình.

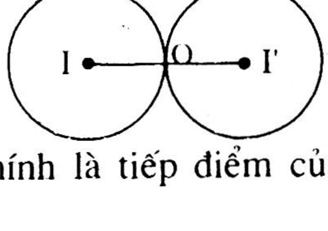
Bài 69: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó chỉ trong trường hợp trục đối xứng song song hoặc trùng với đường thẳng đó

Bài 70: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 71:

a. Hai đường tròn $(I; R)$ và $(I'; R')$ tiếp xúc ngoài với nhau, ta xét:



Trường hợp 1: Nếu $R = R'$ thì $k = \pm 1$.

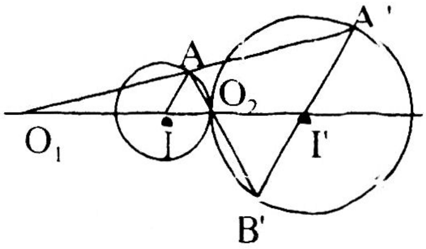
Khi đó, tâm vị tự O thoả mãn:

$\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ k chỉ có thể bằng -1

$\Rightarrow$ O (tâm vị tự trong) là trung điểm của II' (chính là tiếp điểm của hai đường tròn).

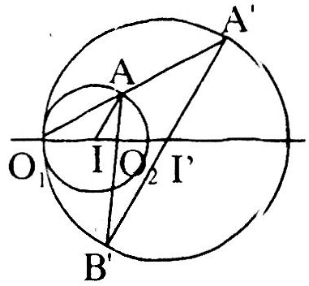
Trường hợp 2: Nếu $R \neq R'$ thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong và O_2 trùng với tiếp điểm).



b. Hai đường tròn (I; R) và (I'; R') tiếp xúc trong với nhau ($R \neq R'$), ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

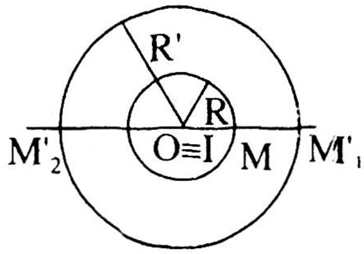


c. Đường tròn (I; R) nằm trong đường tròn (I'; R'), ta xét:

Trường hợp 1: Nếu $I \equiv I'$ thì khi đó tâm vị tự O trùng với điểm I.

Vậy, ta có hai phép vị tự:

- Phép vị tự $V_1(I; k_1)$ với $k_1 = \frac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_1).
- Phép vị tự $V_2(I; k_2)$ với $k_2 = -\frac{R'}{R}$ (biến điểm M thành điểm M'_2).



Trường hợp 2: Nếu I không trùng với I' thì ta có thể xác định các phép vị tự sau:

- Lấy A'B' là một đường kính của đường tròn (I'; R') và IA là một bán kính của (I; R) sao cho hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{I'A'}$ cùng hướng.
- Đường thẳng II' cắt AA' và AB' lần lượt tại O_1 (tâm vị tự ngoài) và O_2 (tâm vị tự trong).

Bài 72: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu k = 1 thì:

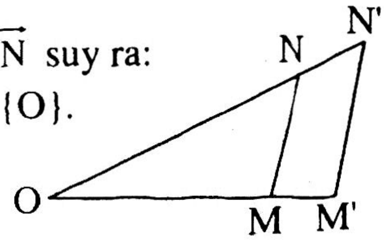
$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow MNN'M \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$$

Suy ra M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MM'}$.

Vậy, trong trường hợp này F là một phép tịnh tiến.

Trường hợp 2: Nếu $k \neq 1$ thì từ đẳng thức $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ suy ra:

MN // M'N' và $MN \neq M'N'$ nên $MM' \cap NN' = \{O\}$.



Từ đó, ta nhận được:

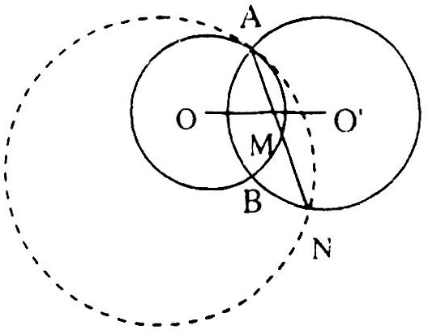
$$\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON} = \frac{MM'}{NN'} = k$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \text{ và } \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$$

Suy ra M', N' theo thứ tự là ảnh của M, N trong phép vị tự tâm O tỉ số k.

Bài 73:

a. *Phân tích*: Giả sử đã dựng được đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN, gọi $k = \dfrac{AN}{AM} = 2$. Thực hiện phép vị tự V tâm A, tỉ số k = 2 thì N = V(M).



b. *Cách dựng*: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng (O") = V(O), khi đó (O") ∩ (O') = {N}.
- Nối AN cắt (O) tại M.

AN là đường thẳng d phải dựng

c. *Chứng minh*: Ta có ngay M, N theo thứ tự thuộc đường tròn (O) và (O'), ngoài ra:

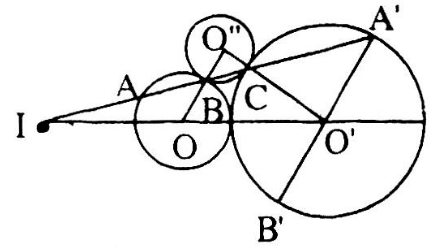
$$N = V(M) \Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\,\overrightarrow{AM} \Rightarrow \text{M là trung điểm của AN.}$$

d. *Biện luận*: Vì (O") cắt (O') tại duy nhất một điểm N nên bài toán chỉ có một nghiệm hình.

Bài 74: *Hướng dẫn*: Dùng phép vị tự tâm I biến M thành N.

Bài 75: Giả sử đường thẳng BC cắt (O), (O') và OO' theo thứ tự tại A, A' và I.

Vì C tâm tỉ cự trong của (O') và (O") nên:



$$\frac{CA'}{CB} = \frac{R'}{R''} = \frac{CO'}{CO''} \Rightarrow O'A' \,//\, BO''$$

$$\Leftrightarrow O'A' \,//\, OB \Rightarrow \frac{IB}{IA'} = \frac{OB}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$

⇒ I là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Vậy, đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Bài 76:

a. Với phép vị tự V, ta có:

$$V_A^{\frac{AB}{AM}}(M) = B;\ V_A^{\frac{AB}{AM}}(N) = C;\ V_A^{\frac{AB}{AM}}(P) = D;\ V_A^{\frac{AB}{AM}}(Q) = E$$

Vì MNPQ là hình vuông nên BCDE cũng là hình vuông.

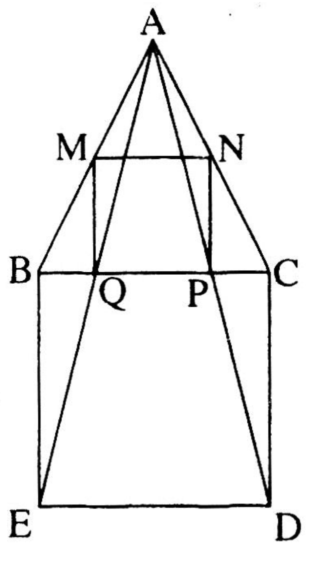
b. Ta thực hiện theo các bước sau:

Phân tích: Giả sử đã dựng được hình vuông MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC cho trước. Gọi $k = \dfrac{MN}{BC}$.

Thực hiện phép vị tự tâm A, tỉ số k thì hình vuông MNPQ sẽ biến thành hình vuông BCDE. Suy ra A, P, D thẳng hàng và A, Q, E thẳng hàng.

Cách dựng: Ta lần lượt thực hiện:

- Dựng hình vuông BCDE sao cho BCDE và ABC nằm ở hai bên của đường thẳng BC.
- AD cắt cạnh BC tại P; AE cắt cạnh BC tại Q



- Dựng đường thẳng qua P, song song với BC cắt cạnh AC tại N
- Dựng đường thẳng qua N, song song với BC cắt cạnh AB tại M

Thì MNPQ là hình vuông phải dựng

Chứng minh: Theo cách dựng ta có tứ giác MNPQ nội tiếp trong tam giác ABC.

Áp dụng định lý Talet, ta có: $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AD}} = \dfrac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{AE}} = k$

Do đó: $V_A^k : MNPQ \mapsto BCDE$

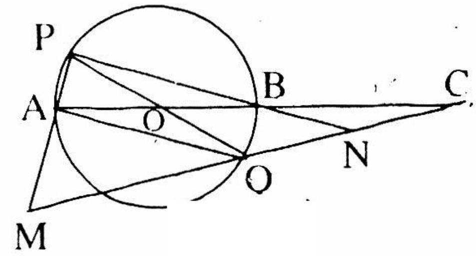
mà BCDE là hình vuông nên MNPQ là hình vuông

Biện luận: Ta luôn chỉ có một hình vuông BCDE ở khác phía của tam giác ABC đối với đường thẳng BC nên luôn có chỉ một điểm P và chỉ một điểm Q ở trên cạnh BC.

Vậy bài toán có một và chỉ một nghiệm hình.

Bài 77:

a. Ta có: $\begin{cases} PB \perp QB \\ PB \perp AP \end{cases} \Rightarrow QB \,//\, AP \Rightarrow QB$ là đường trung bình của ΔACM



$\Rightarrow Q$ là trung điểm của CM.

Ta có: $\begin{cases} PB \perp QB \\ AQ \perp QB \end{cases} \Rightarrow BN \,//\, AQ$

$\Rightarrow BN$ là đường trung bình của ΔACQ

$\Rightarrow N$ là trung điểm của CQ.

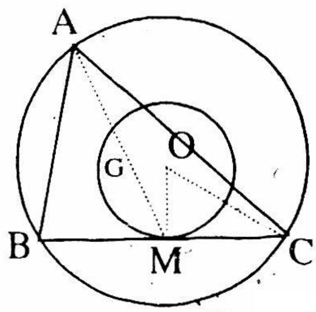
b. Ta lần lượt thấy:

- Với điểm M thì: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CQ} \Rightarrow M = V_C^2(Q)$

  Và vì $Q \in (O)$ nên $M \in (O_1) = V_C^2((O))$.

- Với điểm N thì: $\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CQ} \Rightarrow N = V_C^{\frac{1}{2}}(Q)$

  và vì $Q \in (O)$ nên $N \in (O_2) = V_C^{\frac{1}{2}}((O))$.



Bài 78: Từ điều kiện: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Suy ra G là trọng tâm ΔABC.

Gọi M là trung điểm cạnh BC thì $OM \perp BC$.

Trong ΔOMC ta có: $OM^2 = OC^2 - MC^2 = R^2 - d^2 \Rightarrow OM = \sqrt{R^2 - d^2}$

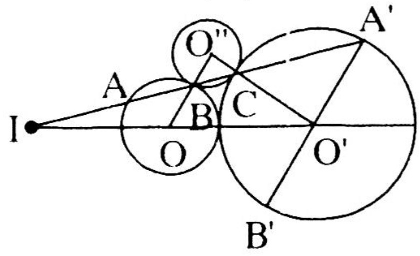
Vậy tập hợp điểm M là đường tròn (γ) tâm O bán kính $\sqrt{R^2 - d^2}$.

Vì $\dfrac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{2}{3}$ nên $V_A^{2/3}(M) = G$

Suy ra tập hợp các điểm G là đường tròn (C') với $(C') = V_A^{2/3}[(\gamma)]$.

Bài 79: Giả sử đường thẳng BC cắt (O), (O') và OO' theo thứ tự tại A, A' và I.

Vì C tâm tỉ cự trong của (O') và (O") nên:



$$\frac{CA'}{CB} = \frac{R'}{R''} = \frac{CO'}{CO''} \Rightarrow O'A' \,//\, BO''$$

$$\Leftrightarrow O'A' \,//\, OB \Rightarrow \frac{IB}{IA'} = \frac{OB}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$

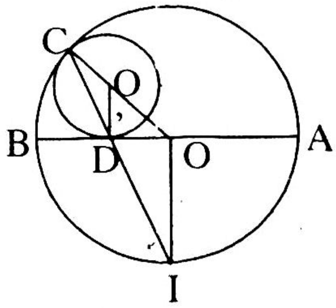
$\Rightarrow$ I là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Vậy, đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định là tâm tỉ cự ngoài của hai đường tròn (O; R) và (O'; R').

Bài 80: Ta có:

- C là tâm vị tự dương của hai đường tròn (O) và (O').
- $D \in (O')$, $I \in (O)$ và ba điểm C, D, I thẳng hàng.

Do đó thực hiện phép vị tự tâm C, tỉ số $\frac{R'}{R}$ (với R' là bán kính của (O')), ta

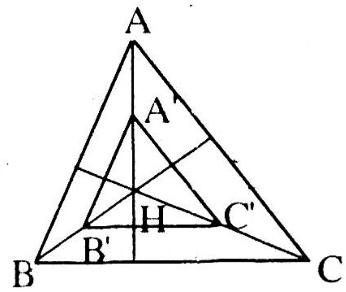


có: $H_C^{\frac{R'}{R}}: O \mapsto O', I \mapsto D \Rightarrow OI \,//\, O'D \Rightarrow OI \perp AB$

$\Rightarrow$ I là trung điểm của cung AB $\Rightarrow$ AI = BI.

Khi đó: $AI = BI = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$.

Bài 81: Gọi $\Delta A'B'C' = V_H^{\frac{1}{2}}(\Delta ABC)$ khi đó:



- $A' = V_H^{\frac{1}{2}}(A) \Rightarrow \overrightarrow{HA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$ do đó A' chính là trung điểm của HA.
- $B' = V_H^{\frac{1}{2}}(B) \Rightarrow \overrightarrow{HB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$ do đó B' chính là trung điểm của HB.
- $C' = V_H^{\frac{1}{2}}(C) \Rightarrow \overrightarrow{HC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$ do đó C' chính là trung điểm của HC.

Bài 82: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Giả sử hai phép vị tự lần lượt có tỉ số k_1 và k_2, khi đó với mỗi điểm M thì: $V_O^{k_1}(M) = M_1$ sao cho $\overrightarrow{OM_1} = k_1\overrightarrow{OM}$. (1)

$V_O^{k_2}(M_1) = M_2$ sao cho $\overrightarrow{OM_2} = k_2\overrightarrow{OM_1}$. (2)

Thay (1) vào (2), ta được: $\overrightarrow{OM_2} = k_2.k_1\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow M_2 = V_O^{k_2k_1}(M)$.

Vậy, khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O (lần lượt có tỉ số k_1 và k_2) sẽ được một phép vị tự tâm O tỉ số $k_1.k_2$.

Bài 83: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 84:

a. Gọi M là trung điểm của đoạn BC và G là trọng tâm ΔABC. Giả sử:

$$F(M) = M' \text{ và } F(G) = G'.$$

Từ hệ quả, ta suy ra: M' là trung điểm của B'C' $\Rightarrow$ A'M' là trung tuyến. (1)

$$\frac{A'G'}{A'M'} = \frac{2}{3}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra G' là trọng tâm $\Delta A'B'C'$.

b. Gọi AA_1, BB_1 là hai đường cao của ΔABC và H là trực tâm ΔABC. Giả sử:

$$F(B_1) = B_1', F(A_1) = A_1' \text{ và } F(H) = H'.$$

- Từ tính chất của phép đồng dạng, ta suy ra: $H' = A_1A_1' \cap B_1B_1'$. (3)
- Từ tính chất bảo toàn độ lớn góc của phép đồng dạng, ta suy ra:
  A_1A_1', B_1B_1' là các đường cao của $\Delta A'B'C'$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra H' là trực tâm $\Delta A'B'C'$.

c. Ta lần lượt xét:

- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Giả sử: $F(O) = O'$.
  Từ tính chất tỉ lệ về độ dài giữa hai đoạn thẳng, ta suy ra:
  $$O'A' = O'B' = O'C' \text{ bởi } OA = OB = OC.$$
  Vậy, điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Bài 85: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Gọi P_1 và P_2 là hai đa giác đều có cùng số cạnh, ta thực hiện:

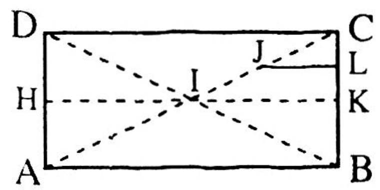
- Phép quay biến P_1 thành P_1' có cạnh song song với cạnh của P_2.
- Khi đó, sẽ tồn tại một phép vị tự biến P_1' thành P_2.

Từ đó, theo định lí trên thì tồn tại một phép đồng dạng biến P_1 thành P_2 nên P_1 đồng dạng với P_2.

Bài 86: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Nhận xét rằng:

- Với phép đối xứng tâm I, ta có: $Đ_I(IHDC) = IKBA$.
- Với phép vị tự tâm C tỉ số $\frac{1}{2}$, ta có:



$$V_C^{\frac{1}{2}}(IKBA) = JLKI.$$

Từ đó, suy ra: $JLKI = V_C^{\frac{1}{2}}(IKBA) = V_C^{\frac{1}{2}}(Đ_I(IHDC))$

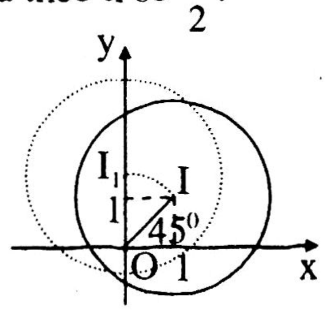
Do đó, hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

Bài 87: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt thực hiện:

a. Với phép quay tâm O góc 45^0 thì:

$$Q_O^{45^0}(I) = I_1(0; \sqrt{2}) \Rightarrow Q_O^{45^0}((I, 2)) = (I_1, 2).$$



b. Với phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$ thì: $V_O^{\sqrt{2}}((I_1, 2)) = (I_2, 2\sqrt{2})$,

Trong đó: $\overrightarrow{OI_2} = \sqrt{2}\overrightarrow{OI_1} = \sqrt{2}((0; \sqrt{2})) \Rightarrow I_2(0; 2)$.

Từ đó, ta được: $(I_2, 2\sqrt{2})$: $\begin{cases} \text{tâm } I_2(0;2) \\ R = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (I_2, 2\sqrt{2})$: $x^2 + (y-2)^2 = 8$.

Bài 88: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

- Với phép vị tự tâm O tỉ số 3, ta được: $V_O^3((I; 2)) = (I_1; R_1)$

  trong đó: $\overrightarrow{OI_1} = 3\overrightarrow{OI} \Rightarrow I_1(3; -9)$; $R_1 = 3.2 = 6$.
- Với phép đối xứng qua trục Ox ta được: $ĐOx((I_1; R_1)) = (I_2; R_1)$ với $I_2(3; 9)$

Từ đó suy ra: $(I_2, 6)$: $(x-3)^2 + (y-9)^2 = 36$.

CHƯƠNG II.
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ SONG SONG

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. MỞ ĐẦU VỀ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Môn *hình học không gian* là môn học nghiên cứu các tính chất của các hình nằm trong không gian.

Hình học không gian có các đối tượng cơ bản là *điểm, đường thẳng* và *mặt phẳng.*

Quan hệ thuộc: Trong không gian:

a. Với một điểm A và một đường thẳng d có thể xảy ra hai trường hợp:
- Điểm A *thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $A \in d$.
- Điểm A *không thuộc* đường thẳng d, kí hiệu $A \notin d$.

b. Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có thể xảy ra hai trường hợp:
- Điểm A *thuộc* mặt phẳng (P), kí hiệu $A \in (P)$.
- Điểm A *không thuộc* mặt phẳng α, kí hiệu $A \notin (P)$.

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Tính chất thừa nhận 1: *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.*

Tính chất thừa nhận 2: *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tính chất thừa nhận 3: *Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Tính chất thừa nhận 4: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó.*

Tính chất thừa nhận 5: *Trong mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết của hình học phẳng đều đúng.*

Định lí: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

3. ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH MẶT PHẲNG

Có bốn cách xác định một mặt phẳng:

Cách 1: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).

Cách 2: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A, d).

Cách 3: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau a, b, kí hiệu (a, b).

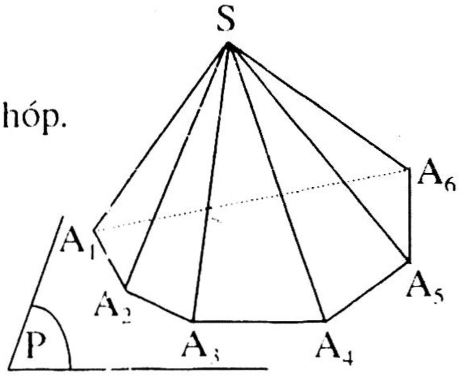
Cách 4: Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng song song a, b, kí hiệu (a, b).

4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n ta được n miền tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., $SA_{n-1}A_n$.

Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ *được gọi là* ***hình chóp*** $S.A_1A_2...A_n$.

Trong đó:



- Điểm S gọi là *đỉnh* của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là *mặt đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp.
- Các đoạn thẳng SA_1, SA_2, ..., SA_n gọi là các *cạnh bên* của hình chóp.
- Các miền tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., $SA_{n-1}A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp.

Nếu đáy của hình chóp là một miền tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

Chú ý:

1. Hình chóp tam giác còn gọi là *hình tứ diện*.
2. Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều được gọi là *hình tứ diện đều*.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 1: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Ba điểm không thẳng hàng cùng thuộc một mặt phẳng duy nhất.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 2: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Khẳng định "Nếu a và b cắt nhau thì hai điểm phải nằm trên Δ" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 3: Cho mặt phẳng (P) và ba điểm không thẳng hàng A, B, C cùng nằm ngoài (P). Khẳng định "Nếu ba đường thẳng AB, BC, CA đều cắt (P) thì các giao điểm đó thẳng hàng" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 4: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng cho trước.

A. Đúng. B. Sai.

b. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng chứa điểm đó.

A. Đúng. B. Sai.

c. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 5: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cho trước.

A. Đúng. B. Sai.

b. Có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

A. Đúng. B. Sai.

c. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua hai đường thẳng mà hai đường thẳng đó lần lượt nằm trên hai mặt phẳng cắt nhau.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 6: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Một đường thẳng c cắt cả a và b. Có thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng hay không ?

A. Có. B. Không.

Bài 7: Cho ba đường thẳng a, b, c không cùng nằm trong một mặt phẳng sao cho chúng đôi một cắt nhau. Có thể kết luận rằng chúng đồng quy hay không ?

A. Có. B. Không.

Bài 8: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại điểm O và đường thẳng c cắt mp(a, b) ở điểm I khác O. Gọi M là điểm di động trên c khác I. Khẳng định "Giao tuyến của các mặt phẳng (M, a), (M, b) nằm trên một mặt phẳng cố định" là đúng hay sai ?

A. Đúng. B. Sai.

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD nằm trong mặt phẳng (P) và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Gọi M là điểm nằm giữa S và A; N là điểm nằm giữa S và B; giao điểm của hai đường thẳng AC và BD là O; giao điểm của hai đường thẳng CM và SO là I; giao điểm của hai đường thẳng NI và SD là J.

a. Tìm giao điểm của mặt phẳng (CMN) với đường thẳng SO.

A. I. B. J. C. A. D. B.

b. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (CMN).

A. MI. B. MJ. C. NI. D. NJ.

Bài 10: Thiết diện của một hình tứ diện có thể là:

a. Tam giác hay không ?

A. Có. **B.** Không.

b. Tứ giác hay không ?

A. Có. **B.** Không.

c. Ngũ giác hay không ?

A. Có. **B.** Không.

Bài 11: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa ΔBCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC.

a. Khẳng định "Đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (ABC)"là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Khi EF và BC cắt nhau tại I. Khẳng định "I là điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (DEF)" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 12: Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi G_A, G_B, G_C, G_D lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD, ABC. Khẳng định "AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy" là đúng hay sai ?

A. Đúng. **B.** Sai.

§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG PHÂN BIỆT

Cho 2 đường thẳng a và b. Căn cứ vào sự đồng phẳng và số điểm chung của 2 đường thẳng ta có bốn trường hợp sau:

a. *Hai đường thẳng song song*: cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung, tức là:

$$a \,//\, b \Leftrightarrow \begin{cases} a \subset (P) \text{ và } b \subset (P) \\ a \cap b = \phi \end{cases}.$$

b. *Hai đường thẳng cắt nhau*: chỉ có một điểm chung.

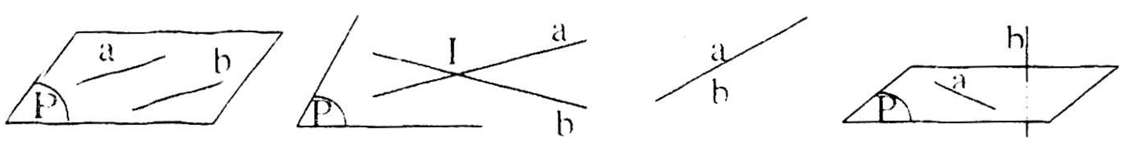
$$a \text{ cắt } b \Leftrightarrow a \cap b = \{I\}.$$

c. *Hai đường thẳng trùng nhau*: có hai điểm chung phân biệt.

$$a \cap b = \{A, B\} \Leftrightarrow a \equiv b.$$

d. *Hai đường thẳng chéo nhau*: không cùng thuộc một mặt phẳng.

$$a \text{ chéo } b \Leftrightarrow a, b \text{ không đồng phẳng}..$$



a//b   a cắt b   a≡b   a,b chéo nhau

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

***Định lí** (Về giao tuyến của ba mặt phẳng)*: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 13: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 14: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của:

a. Hai đường thẳng MQ, NP.

A. MQ // NP. **C.** $MQ \equiv NP$.

B. MQ cắt NP. **D.** MQ, NP chéo nhau.

b. Hai đường thẳng MP, NQ.

A. MP // NQ. **C.** $MP \equiv NQ$.

B. MP cắt NQ. **D.** MP, NQ chéo nhau.

Bài 15: Cho tứ diện ABCD. Bốn điểm P, Q, R, S lần lượt nằm trên bốn cạnh AB, BC, CD, DA và không trùng với các đỉnh của tứ diện. Chứng minh rằng:

a. Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

b. Bốn điểm P, Q, R, S đồng phẳng khi và chỉ khi ba đường thẳng PQ, RS, BP hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

Bài 16: Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên cạnh AB, CD, BC. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (PQR) với (ACD):

a. PR // AC.

A. Qx // AB. **B.** Qx // AC. **C.** Qx // BC. **D.** Qx // CD.

b. PR cắt AC tại điểm I.

A. Qx // AB. **B.** Qx // AC. **C.** Qx // BC. **D.** QI.

<u>Bài 17:</u> Cho tứ diện ABCD. Các điểm P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD; điểm R nằm trên cạnh BC sao cho BR = 2RC. Gọi S là giao điểm của mặt phẳng (PQR) và cạnh AD. Tính tỉ số $\frac{SA}{SD}$.

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

<u>Bài 18:</u> Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

a. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua điểm G và một đỉnh của tứ diện sẽ đi qua trọng tâm của mặt đối diện với đỉnh ấy.

b. Gọi A' là trọng tâm của ΔBCD. Tính tỉ số $\frac{GA}{GA'}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

§ 3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) không có điểm chung, tức là:

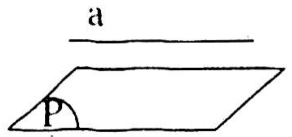
$$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a \,//\, (P).$$

b. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) chỉ có một điểm chung, tức là:

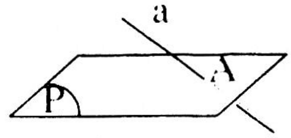
$$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a \text{ cắt } (P) \text{ tại } A.$$

c. Đường thẳng a và mặt phẳng (P) có 2 điểm chung phân biệt, tức là:

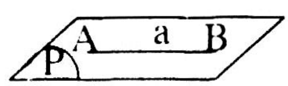
$$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P).$$



$a \cap (P) = \varnothing \Leftrightarrow a//(P)$



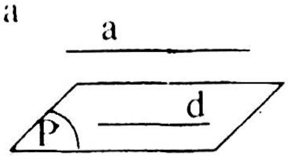
$a \cap (P) = \{A\} \Leftrightarrow a$ cắt (P)



$a \cap (P) = \{A, B\} \Leftrightarrow a \subset (P)$

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ MỘT ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT MẶT PHẲNG

Định lí 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P).

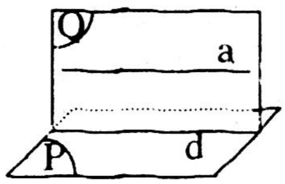


Tức là, với $a \not\subset (P)$ thì nếu:

$$a \,//\, d \subset (P) \Rightarrow a \,//\, (P).$$

3. TÍNH CHẤT

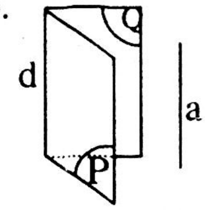
Định lí 2: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) thì mọi mặt phẳng (Q) chứa a mà cắt (P) thì sẽ cắt theo một giao tuyến song song với a.



Tức là, nếu: $\begin{cases} a // (P) \\ a \subset (Q)\left[(Q) \cap (P) = d\right] \end{cases} \Rightarrow a // d.$

Hệ quả 1: Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó trong mặt phẳng.

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến (nếu có) của chúng song song với đường thẳng đó.



Tức là: $\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P) // a \\ (Q) // a \end{cases} \Rightarrow d // a.$

Hệ quả 3: Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng song song với b.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 19: Cho hai đường thẳng a và b cùng song song với mp(P). Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. a và b song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. a và b chéo nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. a và b có thể cắt nhau

A. Đúng. **B.** Sai.

d. a và b trùng nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. a và b có một trong bốn vị trí tương đối ở các câu a), b), c) và d).

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 20: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a, b. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Nếu (P) song song với a thì (P) song song với b hoặc chứa b.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Nếu (P) song song với a thì (P) chứa b.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

f. Nếu (P) chứa a thì (P) có thể song song với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 21: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a. Xét vị trí tương đối của đường thẳng MN và mặt phẳng (BCD).

A. MN // (BCD). **C.** MN $\subset$ (BCD).

B. MN cắt (BCD).

b. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMN) và (DBC). Xét vị trí tương đối của d và mặt phẳng (ABC).

A. d // (ABC). **C.** d $\subset$ (ABC).

B. d cắt (ABC).

Bài 22: Cho tứ diện ABCD. Có thể hay không cắt tứ diện bằng một mặt phẳng để:

a. Thiết diện là hình thang ?

A. Có. **B.** Không.

b. Thiết diện là hình bình hành ?

A. Có. **B.** Không.

c. Thiết diện là hình thoi ?

A. Có. **B.** Không.

Bài 23: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC (hình trang 79). E là điểm trên cạnh CD với ED = 3EC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là :

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà EF // BC.

D. Hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà EF // BC.

Bài 24: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là tứ giác lồi, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BC.

a. Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC.

b. Hỏi thiết diện đó là hình gì ?

A. Hình thang. **C.** Hình chữ nhật.

B. Hình bình hành. **D.** Hình vuông.

Bài 25: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA là hình gì ?

A. Tam giác. B. Tứ giác. C. Ngũ giác. D. Lục giác.

§ 4: HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT THẲNG PHÂN BIỆT

Cho 2 mặt phẳng (P) và (Q). Căn cứ vào số đường thẳng chung của 2 mặt phẳng ta có ba trường hợp sau:

a. Hai mặt phẳng (P) và (Q) không có đường thẳng chung, tức là:

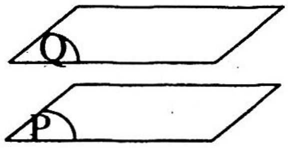
$$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P) // (Q).$$

b. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chỉ có một đường thẳng chung, tức là:

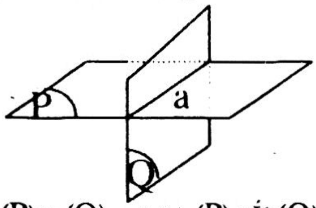
$$(P) \cap (Q) = a \Leftrightarrow (P) \text{ cắt } (Q).$$

c. Hai mặt phẳng (P) và (Q) có 2 đường thẳng chung phân biệt, tức là:

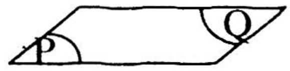
$$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q).$$



$(P) \cap (Q) = \varnothing \Leftrightarrow (P)//(Q)$



$(P) \cap (Q) = a \Leftrightarrow (P)$ cắt (Q)

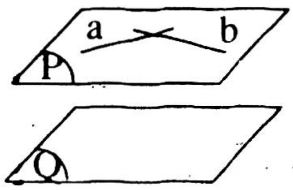


$(P) \cap (Q) = \{a, b\} \Leftrightarrow (P) \equiv (Q)$

2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định lí 1: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song (Q).

Tức là: $\begin{cases} a, b \in (P) \\ a \text{ cắt } b \\ a //(Q) \text{ và } b //(Q) \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q).$



3. TÍNH CHẤT

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Tức là: $O \notin (P) \Rightarrow \exists!(Q): \begin{cases} O \in (Q) \\ (P) //(Q) \end{cases}.$

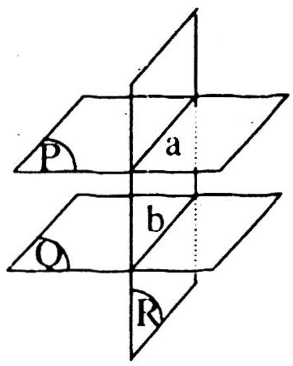
Cách dựng: - Trong (P) dựng a, b cắt nhau.

- Qua O dựng $a_1 // a$, $b_1 // b$.
- Mặt phẳng (a_1, b_1) là mặt phẳng qua O và song song với (P).

Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì qua a có một và chỉ một mặt phẳng (P) song song với (Q).

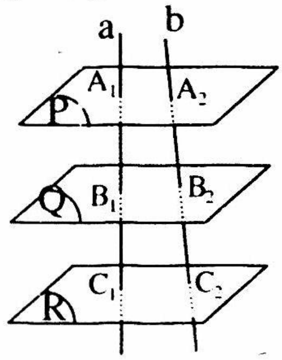
Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.



Tức là: $\begin{cases} (P) // (Q) \\ a = (P) \cap (R) \\ b = (Q) \cap (R) \end{cases} \Rightarrow a // b.$

Định lí Ta – lét trong không gian: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

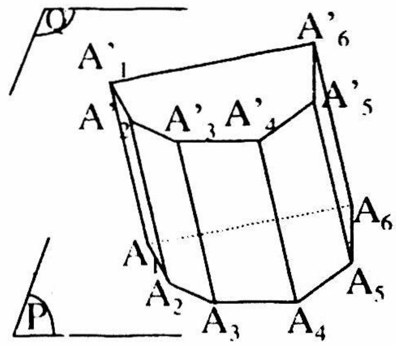


Tức là: $\begin{cases} (P) // (Q) // (R) \\ a \cap (P) = A_1 \text{ và } a \cap (Q) = B_1 \text{ và } a \cap (R) = C_1 \\ b \cap (P) = A_2 \text{ và } b \cap (Q) = B_2 \text{ và } b \cap (R) = C_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$

4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa hình lăng trụ: *Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.*



Trong đó:

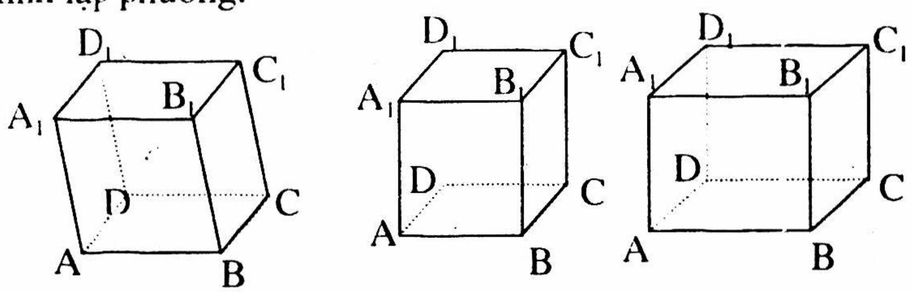
- Các mặt khác với hai đáy gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Tuỳ theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.
b. Các mặt bên và các các mặt chéo là những hình bình hành.
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

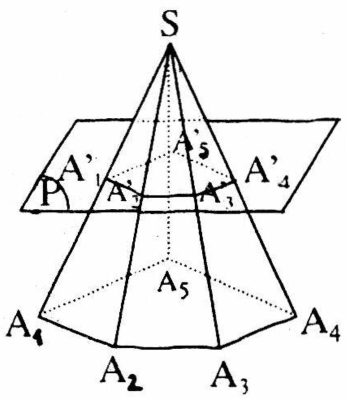
Định nghĩa hình hộp: *Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.*

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.
b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.



Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

5. HÌNH CHÓP CỤT



Định nghĩa: Cho hình chóp $SA_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n theo thứ tự tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là một *hình chóp cụt.*

Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ...$A_nA'_n$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, .. ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Cách cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 26: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên một mặt phẳng đều song song với mặt phẳng còn lại.

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

f. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 27: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hình hộp là một hình lăng trụ.

A. Đúng. B. Sai.

b. Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song.

A. Đúng. B. Sai.

c. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.

A. Đúng. B. Sai.

d. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.

A. Đúng. B. Sai.

e. Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 28: Tìm mệnh đề SAI trong các mệnh đề sau đây:

A. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

B. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Bài 29: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Bài 30: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Hỏi nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có bao nhiêu đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.

A. 1. B. 2. C. 4. D. Vô số.

Bài 31: Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại 4 điểm A', B', C', D'. Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

A. Hình thang.
C. Hình chữ nhật.
B. Hình bình hành.
D. Hình vuông.

Bài 32: Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz lần lượt là các đường thẳng song song với nhau đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD), đồng thời không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B' , C' , D' với BB' = 2, DD' = 4. Khi đó CC' bằng:

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Bài 33: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C' (hình trg 79). Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với hình lăng trụ đã cho là:

A. Tam giác cân.
C. Hình thang.
B. Tam giác vuông.
D. Hình bình hành.

Bài 34: Cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía đối với mặt phẳng (ABCD), song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt Ax, By, Cz và Dt tại A', B', C' và D'.

a. Chứng minh (Ax, By) // (Cz, Dt).

b. Gọi I = AC $\cap$ BD, J = A'C' $\cap$ B'D'. Chứng minh IJ // AA'.

c. Cho AA' = x, BB' = y, CC' = z. Hãy tính DD'.

A. x + y + z. B. x + y − z. C. x − y + z. D. x − y − z.

Bài 35: Cho tứ diện ABCD. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua điểm M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không ?

A. Có.
B. Không.

Bài 36: Cho tứ diện đều SABC cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm AB, M là một điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC).

a. Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện SABC là:

A. Tam giác cân tại M.
C. Hình bình hành.
B. Tam giác đều.
D. Hình thoi.

b. Chu vi của thiết diện theo AM = x là:

A. $x(1 + \sqrt{3})$.
C. $3x(1 + \sqrt{3})$.
B. $2x(1 + \sqrt{3})$.
D. Không tính được.

Bài 37: Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBC). Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD là hình gì ?

A. Tam giác. B. Hình bình hành. C. Hình thang. D. Hình vuông.

Bài 38: Gọi N, P, Q lần lượt là giao của mặt phẳng (α) với các đường thẳng CD, DS, SA. Tập hợp các giao điểm I của hai đường thẳng MQ và NP là :

A. Đường thẳng.
C. Đoạn thẳng song song với AB.
B. Nửa đường thẳng.
D. Tập hợp rỗng.

Bài 39: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm của cạnh A'B'.

a. Chứng minh rằng đường thẳng B'C' song song với mặt phẳng (AHC').

b. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (A'B'C') và (A'BC). Chứng minh rằng d song song với mặt phẳng (BB'C'C).

c. Thiết diện của hình lăng trụ ABC.A'B'C' khi cắt bởi mặt phẳng (H, d) là hình gì ?

A. Tam giác. B. Hình bình hành. C. Hình thang. D. Hình vuông.

Bài 40: Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

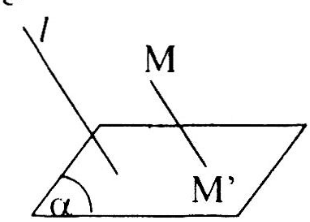
§ 5. PHÉP CHIẾU SONG SONG

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. PHÉP CHIẾU SONG SONG

Cho mặt phẳng α và một đường thẳng *l* không song song với α.

Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song với *l* sẽ cắt α tại điểm M'. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng α theo phương *l*.



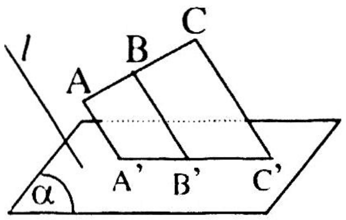
Mặt phẳng α gọi là *mặt phẳng chiếu.*

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên α được gọi là *phép chiếu song song lên mặt phẳng α theo phương l.*

Chú ý: Nếu a // *l* thì hình chiếu của a lên α là một điểm trên α (chính là giao điểm của a với α), do vậy các tính chất trong phần sau chỉ xét những đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song với *l*.

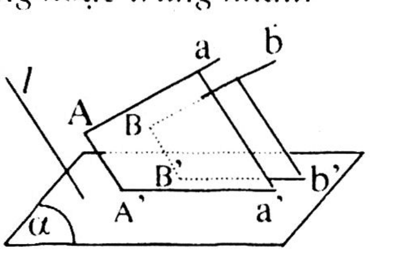
2. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

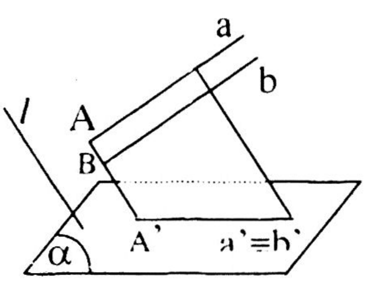
Định lí 1: *Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.*



Hệ quả: *Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng, của tia là tia, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.*

Định lí 2: *Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.*

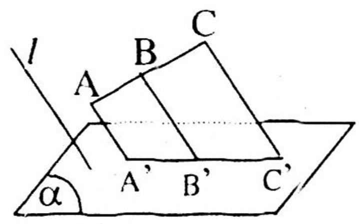




Hệ quả: *Hình chiếu song song của một hình bình hành không nằm trong mặt phẳng song song với phương chiếu là một hình bình hành.*

Định lí 3: *Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.*

Tức là: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$.



3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

Ta thường vẽ các hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, ... trên bảng hay trên trang giấy, các hình vẽ đó gọi là *hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng.*

Định nghĩa: *Hình biểu diễn của một hình* H *trong không gian là hình chiếu song song của* H *lên một mặt phẳng nào đó* theo một phương chiếu nào đó.

Các yêu cầu đối với một hình biểu diễn:

1. *Hình biểu diễn phải đúng*: Để vẽ đúng chúng ta cần quan tâm tới các yếu tố được bảo toàn sau:
   a. Sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm trên một đường thẳng.
   b. Sự song song của các đường thẳng, các tia hoặc các đoạn thẳng.
   c. Tỉ số độ dài của các đoạn thẳng cùng phương.

   Như vậy, *các tính chất của hình không thay đổi qua phép chiếu song song đều được giữ nguyên trên hình biểu diễn.*
2. *Hình biểu diễn phải nổi*: Giúp chúng ta dễ tưởng tượng.

   Chúng ta có:
   - ***Tam giác***: Một ΔABC có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác bất kì (đều, cân, vuông).
   - ***Hình bình hành***: Một hình bình hành ABCD có thể xem là hình biểu diễn của các loại hình bình hành như hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi và hình bình hành bất kì.
   - ***Đường tròn***: Để biểu diễn đường tròn chúng ta sử dụng một hình Elíp.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 41: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 42: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 43: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

A. Đúng. B. Sai.

b. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau thì cắt nhau.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 44: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng với nhau.

A. Đúng. B. Sai.

b. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 45: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó.

A. Đúng. B. Sai.

b. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 46: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC sao cho $IJ \parallel BC_1$. Tính tỉ số $\frac{ID}{IB_1}$.

A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 47: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

A. Đúng. B. Sai.

b. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

A. Đúng. B. Sai.

c. Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng.

A. Đúng. B. Sai.

d. Hai đường thẳng song song thì chéo nhau.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 48: Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a. Hai mặt thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

A. Đúng. B. Sai.

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau.

A. Đúng. B. Sai.

c. Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau.

A. Đúng. B. Sai.

d. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

A. Đúng. B. Sai.

e. Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại.

A. Đúng. B. Sai.

f. Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại.

A. Đúng. B. Sai.

g. Một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

A. Đúng. B. Sai.

Bài 49: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC; G là trọng tâm ΔBCD. Khi đó, giao điểm của đường thẳng MG và mp(ABC) là:

A. Điểm C. B. Điểm N.

C. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN.

D. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.

Bài 50: Cho tứ diện ABCD và ba điểm E, F, G lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(EFG) là:

A. Một đoạn thẳng. C. Một hình thang.

B. Một tam giác. D. Một ngũ giác.

Bài 51: Cho tứ diện ABCD và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện ABCD khi cắt bởi mp(IJK) là:

A. Một đoạn thẳng. C. Một hình thang.

B. Một tam giác. D. Một ngũ giác.

Bài 52: Cho hình chóp S.ABCD. Gọi $AC \cap CD = J$, $AD \cap BC = K$. Đẳng thức nào sai trong các đẳng thức sau?

A. $(SAC) \cap (SBD) = SI$. C. $(SAD) \cap (SBC) = SK$.

B. $(SAB) \cap (SCD) = SJ$. D. $(SAC) \cap (SAD) = AB$.

Bài 53: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và AC, N là điểm trên cạnh BD sao cho BN = 2ND. Gọi F là giao điểm của AD và mặt phẳng (MNK). Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. AF = FD. B. AF = 2FD. C. AF = 3FD. D. FD = 2AF.

Bài 54: Cho hình chóp S.ABCD. Một mặt phẳng không đi qua đỉnh nào của hình chóp cắt các cạnh SA, SB, SC < SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Các đường thẳng A'C', B'D', SO đội một chéo nhau.

B. Các đường thẳng A'C', B'D', SO đồng phẳng.

C. Các đường thẳng A'C', B'D', SO đồng quy.

D. Hai đường thẳng A'C' và B'D' cắt nhau còn hai đường thẳng A'C' và SO chéo nhau.

Bài 55: Cho tứ diện ABCD. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của ΔABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Đường thẳng GE song song với đường thẳng CD.

B. Đường thẳng GE cắt đường thẳng CD.

C. Hai đường thẳng GE và CD chéo nhau.

D. Đường thẳng GE cắt đường thẳng AD.

Bài 56: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (GCD) thì diện tích của thiết diện là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 57: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Khi đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với:

A. Đường thẳng AD. **C.** Đường thẳng BI.

B. Đường thẳng BJ. **D.** Đường thẳng IJ.

Bài 58: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. A'B' // mp(SAD). **C.** mp(A'C'D') // mp(ABC).

B. A'C' // mp(SBD). **D.** A'C' // BD.

Bài 59: Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho AM = m (0 < m < a). Khi đó, diện tích thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(ACD) là:

A. $\dfrac{m^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{(a+m)^2\sqrt{3}}{4}$.

B. $\dfrac{(a-m)^2\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{(a-m)^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 60: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt CDD'C'.

Bài 61: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) song song với AC và SB lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SD, BD tại M, N, E, F, I, J. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đôi một song song.

B. Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng quy.

C. Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng phẳng.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Bài 62: Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho MC = 2AM; NF = 2BN. Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1 và N_1. Chứng minh rằng:

a. MN // DE.

b. M_1N_1 // (DEF).

c. (MNN_1M_1) // (DEF).

Bài 63: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng:

a. GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.

b. G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

c. $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$, $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Bài 64: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Trên ba cạnh AB, DD', C'B' lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a. Chứng minh rằng mp(MNP) và mp(AB'D') song song với nhau.

b. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài 65: Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho AM = kBN (k > 0 cho trước).

a. Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho IM = kIN.

Bài 66: Cho hai đường thẳng chéo nhau a, b. Trên a lấy hai điểm phân biệt A, B; trên b lấy hai điểm phân biệt C, D.

a. Chứng minh rằng AC và BD chéo nhau.

b. M là một điểm trên cạnh AC, N là một điểm trên cạnh BD. MN có thể song song với AB hoặc CD được không ?

c. O là điểm trên đoạn MN. Chứng minh rằng AO cắt CN, và BO cắt DM.

Bài 67: Trong mặt phẳng α, cho tứ giác ABCD, S là một điểm không thuộc α. Gọi I, J là hai điểm cố định trên SA và SC với SI > IA và SJ < JC. Một mặt phẳng β quay quanh IJ cắt SB tại M, SD tại N.

a. Chứng minh rằng IJ, MN và SO đồng quy (với O là giao điểm của AC và BD). Suy ra cách dựng điểm N khi biết điểm M.

b. AD cắt BC tại E, IN cắt MJ tại F. Chứng minh S, E, F thẳng hàng.

c. IN cắt AD tại P, MJ cắt BC tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi α di động.

Bài 68: Cho hình chóp SABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SB, SD và OC.

a. Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC) và tìm giao điểm của SA với (MNP).

b. Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP)

c. Tính tỷ số mặt phẳng (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD.

Bài 69: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, các cạnh đáy AD = a, BC = b. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các ΔSAD, ΔSBC.

a. Tìm giao tuyến của (SAD) với (SBC).

b. Tìm giao tuyến của (BCI) với (SAD).

c. Tìm giao tuyến của (ADJ) với (SBC)

d. Tìm độ dài đoạn giao tuyến của hai mặt phẳng (ADJ) và (BCI) giới hạn bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Bài 70: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng a, mặt bên SAB là tam giác đều. Cho $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là một điểm trên cạnh AD. Mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N.

a. Chứng minh HKMN là hình thang cân.

b. Đặt $AM = x$ $(0 \le x \le a)$, tính diện tích của tứ giác HKMN theo a, x. Tính x để diện tích này nhỏ nhất.

c. Tìm tập hợp giao điểm của HM và KN; của HN và KM.

Bài 71: Cho chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD. Gọi P là trung điểm của SA.

a. Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b. Chứng minh rằng SB song song với (MNP).

c. Chứng minh rằng SC song song với (MNP).

d. Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm ΔABC và ΔSBC. Chứng minh G_1G_2 song song với (SAD).

Bài 72: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang có đáy lớn BC = 2a, AD = a, AB = b. Mặt bên SAD là tam giác đều. α là mặt phẳng qua điểm M trên cạnh AB và song song với SA và BC, α cắt CD, SC, S B lần lượt tại N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Tính diện tích thiết diện theo a, b và x = AM, $(0 < x < b)$. Tính giá trị lớn nhất của diện tích.

Bài 73: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{JB}{JC}$.

a. Chứng minh rằng IJ luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b. Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước (tức điểm M thoả $\overrightarrow{IM} = k.\overrightarrow{MJ}$).

Bài 74: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang, đáy lớn AB = 3a, AD = CD = a. Mặt bên (SAB) là tam giác cân đỉnh S với SA = 2a, α là mặt phẳng di động song song với (SAB), cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a. Chứng minh MNPQ là hình thang cân.

b. Đặt x = AM, với $0 < x < a$. Định x để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c. Gọi I là giao điểm của MQ và NP. Tìm tập hợp những điểm I khi M di động trên AD.

d. Gọi J là giao điểm của MP và NQ. Chứng minh IJ có phương không đổi và J di động trong một mặt phẳng cố định.

Bài 75: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Gọi M, M_1 theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC và B_1C_1.

a. Chứng minh rằng $AM // A_1M_1$.

b. Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB_1C_1) với đường thẳng A_1M.

c. Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB_1C_1) và (BA_1C_1).

d. Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AMA_1). Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔAB_1C_1.

Bài 76: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$, đáy là tam giác đều cạnh a. Các mặt bên ABB_1A_1, ACC_1A_1 là hình vuông. Gọi I, J là tâm các mặt bên nói trên và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

a. Chứng minh IJ song song với mặt phẳng (ABC).

b. Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (IJO). Chứng minh thiết diện là thang cân. Tính diện tích của nó theo a.

Bài 77: Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

Bài 78: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a. Chứng minh rằng $(BDA_1) // (B_1D_1C)$.

b. Chứng minh đường chéo AC_1 đi qua các trọng tâm G, G_1 của ΔA_1BD và ΔCB_1D_1 và G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

c. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng $(A_1B_1G_1)$ với hình hộp đã cho. Thiết diện là hình gì ?

d. Gọi O, K lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và BCC_1B_1. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (A_1OK) với hình hộp đã cho.

Bài 79: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B_1C_1 và DD_1.

a. Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP). Thiết diện là hình gì ? Tính diện tích của nó.

Bài 80: Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh hình chiếu song song K của điểm G trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là trọng tâm ΔBCD.

b. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, AD. Tìm hình chiếu song song của các điểm M, N, P trong phép chiếu song song ở câu a).

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN

Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). A.

a. Mệnh đề là sai bởi có vô số mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b. Mệnh đề là đúng theo tính chất thừa nhận 2.

c. Mệnh đề là đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 2: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Giả sử:

$$a \cap b = \{M\} \Rightarrow \begin{cases} M \in a \subset (P) \\ M \in b \subset (Q) \end{cases} \Rightarrow M \in (P) \cap (Q) = \Delta \Rightarrow M \in \Delta.$$

Bài 3: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Giả sử các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt cắt (P) tại D, E, F, ta đi chứng minh ba điểm D, E, F thẳng hàng.

Trước tiên, ta thấy ngay ba điểm D, E, F thuộc mặt phẳng (P).

Mặt khác, ta có:

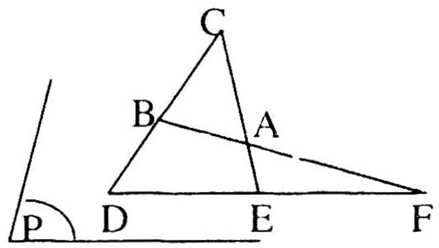
$D \in BC \subset (ABC) \Rightarrow D \in (ABC).$

$E \in CA \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC).$

$F \in AB \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC).$

Vậy, ta được: $(ABC) \cap (P) = \{D, E, F\}$

$\Rightarrow$ D, E, F thẳng hàng.



Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). A.

a. Mệnh đề này sai – *Bạn đọc tự giải thích.*

b. Mệnh đề này sai bởi có vô số mặt phẳng chứa một đường thẳng cho trước.

c. Mệnh đề này đúng, bởi giả sử tồn tại hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa điểm A và đường thẳng a (với $A \notin a$).

Lấy hai điểm phân biệt B, C thuộc a, ta nhận thấy:

$$\begin{cases} (P) \equiv (ABC) \\ (Q) \equiv (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \equiv (Q).$$

Vậy, có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó.

Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). B.

a. Mệnh đề này sai, thí dụ khi hai đường thẳng đó trùng nhau.

b. Mệnh đề này đúng, bởi giả sử tồn tại hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b ($a \cap b = \{C\}$).

Lấy hai điểm A và B theo thứ tự thuộc a và b (A, B khác C), ta nhận thấy:

$$\begin{cases} (P) \equiv (ABC) \\ (Q) \equiv (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \equiv (Q).$$

Vậy, có một mặt phẳng duy nhất đi qua hai đường thẳng cắt nhau cho trước.

c. Mệnh đề này sai, thí dụ không có mặt phẳng nào đi qua hai đường thẳng AB và CC_1 của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Bài 6: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Không thể kết luận rằng ba đường thẳng a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng, bởi nếu a, b, c cùng đồng quy tại A thì chúng có thể không đồng phẳng (thí dụ ba đường thẳng AB, AD, AA_1, của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$).

Bài 7: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Với ba đường thẳng phân biệt a, b, c. Giả sử:

$$a \cap b = \{A\},\ b \cap c = \{B\},\ c \cap a = \{C\}.$$

Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Ba điểm A, B, C là ba điểm phân biệt.

Do a, b, c phân biệt nên A, B, C là ba điểm không thẳng hàng. Vậy chúng xác định một mặt phẳng (ABC). Ta có:

- Đường thẳng a có hai điểm A, C thuộc (ABC), nên $a \in (ABC)$.
- Tương tự $b \in (ABC)$ và $c \in (ABC)$.

Vậy, ba đường thẳng a, b, c cùng thuộc một mặt phẳng (ABC) – Mâu thuẫn.

Trường hợp 2: Hai trong ba điểm A, B, C trùng nhau, giả sử $A \equiv B$.

Nếu $A \neq C$ thì $a \equiv c$, mâu thuẫn.

Do đó, ta phải có $A \equiv C \Leftrightarrow A \equiv B \equiv C \Leftrightarrow$ a, b, c đồng quy.

Vậy, ba đường thẳng a, b, c đồng quy.

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:

$$(M, a) \cap (M, b) = MO \subset (O, C) \text{ – cố định.}$$

Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

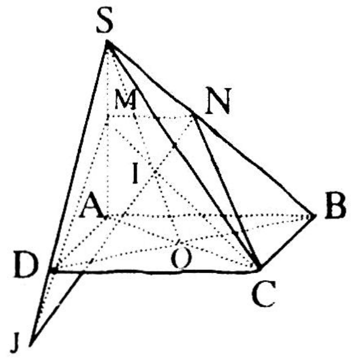
a. Trong mặt phẳng (SAC), ta có:

$$CM \cap SO = \{I\} \Rightarrow \{I\} = (CMN) \cap SO.$$

b. Trong mặt phẳng (SBD), ta có:

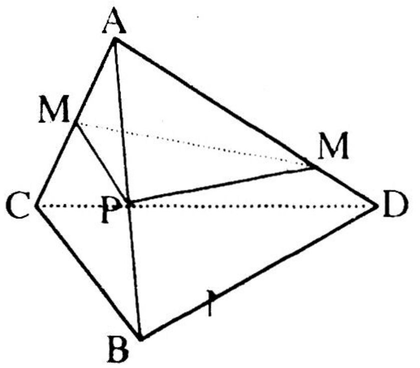
$$NI \cap SD = \{J\} \Rightarrow \{J\} = (CMN) \cap SD$$

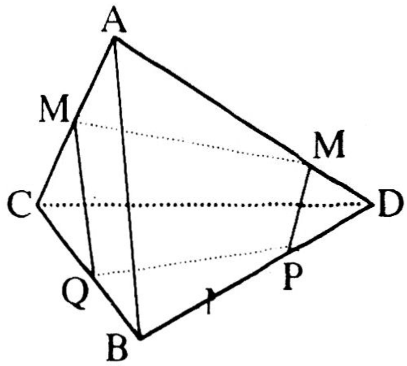
$$\Rightarrow (SAD) \cap (CMN) = MJ.$$



Bài 10: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). B.

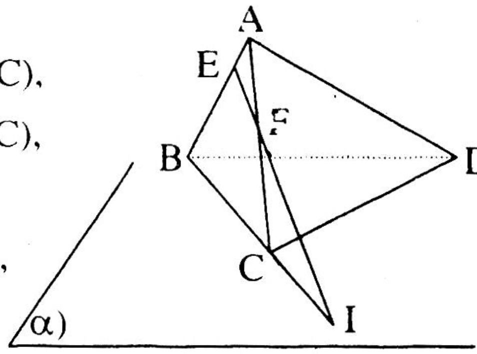
Thiết diện của một hình tứ diện có thể là tam giác, tứ giác (như trong hình vẽ dưới đây):





Thiết diện của một hình tứ diện không thể là ngũ giác bởi tứ diện chỉ có bốn mặt.

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.



a. Ta có nhận xét: $E \in AB \subset (ABC) \Rightarrow E \in (ABC)$,

$F \in AC \subset (ABC) \Rightarrow F \in (ABC)$,

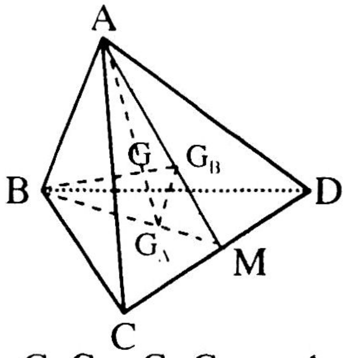
Từ đó, suy ra $EF \subset (ABC)$

b. Ta có nhận xét: $I \in EF \subset (DEF) \Rightarrow I \in (DEF)$,

$I \in BC \subset (BCD) \Rightarrow I \in (BCD)$,

Từ đó, suy ra $I \in (BCD) \cap (DEF)$.

Bài 12: *Đáp số trắc nghiệm* A.



Lời giải tự luận: Ta có thể trình bày theo hai cách sau:

Cách 1: Gọi M là trung điểm CD, ta có nhận xét:

$$\frac{MG_A}{MB} = \frac{MG_B}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_AG_B \,//\, BA.$$

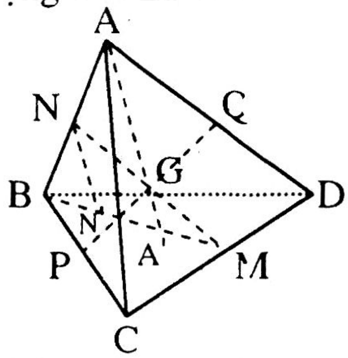
Gọi G là giao điểm của AG_A và BG_B, ta có: $\dfrac{G_AG}{AG} = \dfrac{G_BG}{BG} = \dfrac{G_AG_B}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

Chứng minh tương tự ta cũng nhận được khẳng định AG_A và CG_C cũng cắt nhau tại G.

Vậy, ba đoạn AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy tại G.

Cách 2: Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD (trung điểm đoạn MN).

Nối AG cắt BN tại A', ta cần chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD.



Kẻ NN' song song với AA' (N' ∈ BM), khi đó:

NN' là đường trung bình của ΔABA'

⇒ N'B = N'A'. (1)

GA' là đường trung bình của ΔN'MN

⇒ N'A' = MA'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra BA' = 2MA'.

Và vì A' thuộc trung tuyến BM của ΔBCD nên A' là trọng tâm ΔBCD, tức là $A' \equiv G_A$ hay nói cách khác AG_A đi qua G.

Chứng minh tương tự, ta có BG_B, CG_C đi qua G.

Vậy, ba đoạn AG_A, BG_B, CG_C đồng quy tại G.

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). B; d). A.

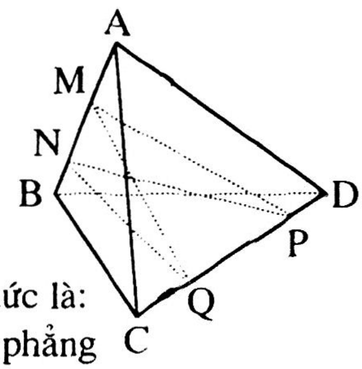
a. Mệnh đề này là đúng, bởi nếu trái lại giả sử chúng có điểm chung thì suy ra chúng đồng phẳng.

b. Mệnh đề này là sai, bởi hai đường thẳng song song cũng không có điểm chung.

c. Mệnh đề này là sai, bởi hai đường thẳng có thể cắt nhau.

d. Mệnh đề này là đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.



a. Hai đường thẳng MQ, NP chéo nhau, bởi nếu trái lại tức là: MQ và NP đồng phẳng

$\Rightarrow$ bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng

$\Rightarrow$ MN và PQ đồng phẳng

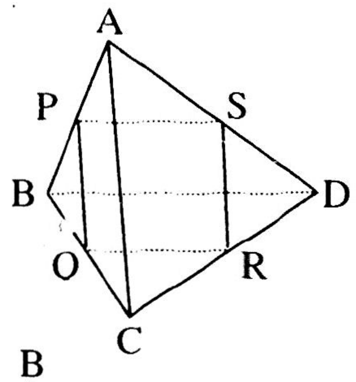
$\Rightarrow$ AB và CD đồng phẳng, điều đó là mâu thuẫn.

b. Hai đường thẳng MP, NQ chéo nhau, bởi nếu trái lại tức là:

MP và NQ đồng phẳng $\Rightarrow$ bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng

$\Rightarrow$ MN và PQ đồng phẳng $\Rightarrow$ AB và CD đồng phẳng, điều đó là mâu thuẫn.

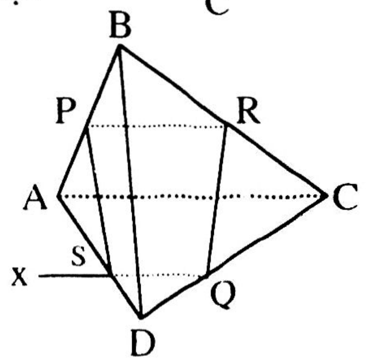
Bài 15:



a. Nhận xét rằng ba mặt phẳng phân biệt (PQRS), (ABC), (ACD) cắt nhau theo ba giao tuyến PQ, SR, AC, do đó ba đường thẳng PQ, SR, AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

b. Nhận xét rằng ba mặt phẳng phân biệt (PQRS), (ABD), (BCD) cắt nhau theo ba giao tuyến PS, QR, BD, do đó ba đường thẳng PS, QR, BD hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

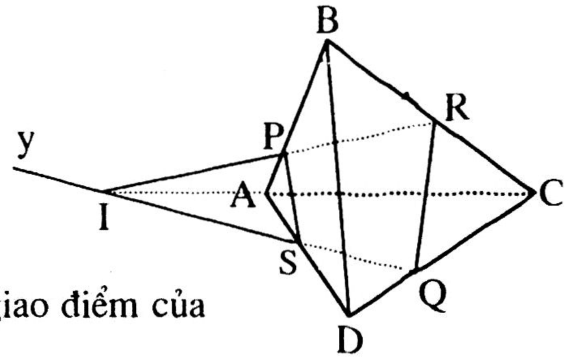
Bài 16: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). D.



a. Ta có:

$$\begin{cases}(ABC)\cap(ACD)=AC\\(ABC)\cap(PQR)=PR\\(ACD)\cap(PQR)=Qx\\PR\,//\,AC\end{cases}\Rightarrow Qx\,//\,PR\,//\,AC.$$

b. Ta có:



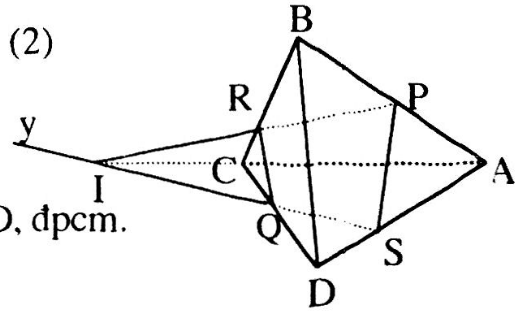
$$\begin{cases}(ABC)\cap(ACD)=AC\\(ABC)\cap(PQR)=PR\\(ACD)\cap(PQR)=Qx\\PR\cap AC=\{I\}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Qy, PR và AC đồng quy tại I.

Giả sử Qx cắt AD tại S thì S chính là giao điểm của (PQR) với cạnh AD.

Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Xét ΔABC với I, R, P thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được: $\dfrac{PA}{PB}\cdot\dfrac{RB}{RC}\cdot\dfrac{IC}{IA}=1\Rightarrow\dfrac{IC}{IA}=\dfrac{1}{2}$. (2)



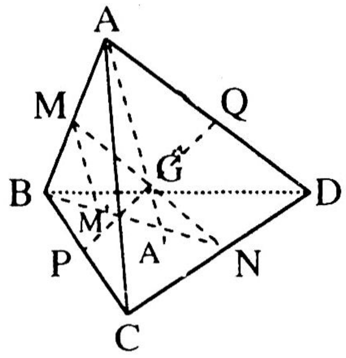
Xét ΔACD với I, Q, S thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:

$$\frac{SA}{SD}\cdot\frac{QD}{QC}\cdot\frac{IC}{IA}=1\Rightarrow\frac{SA}{SD}=2\Leftrightarrow SA=2SD,\text{ đpcm.}$$

Bài 18:

a. Nối AG cắt BN tại A', ta cần chứng minh A' là trọng tâm ΔBCD.

Kẻ MM' song song với AA' ($M' \in BN$), khi đó:



MM' là đường trung bình của $\Delta ABA'$

$\Rightarrow M'B = M'A'$. (1)

GA' là đường trung bình của $\Delta M'MN$

$\Rightarrow M'A' = NA'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BA' = 2NA'$.

Và vì A' thuộc trung tuyến BN của ΔBCD nên A' là trọng tâm ΔBCD.

b. *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Xét $\Delta ABA'$ với M, G, N thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được: $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{GA}{GA'}\cdot\frac{NA'}{NB} = 1 \Rightarrow \frac{GA}{GA'} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow GA = 3GA'$, đpcm.

Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). A; d). B; e). A.

a. Mệnh đề này sai, bởi a và b có thể cắt nhau.

b. Mệnh đề này sai, bởi a và b có thể cắt nhau.

c. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

d. Mệnh đề này sai, bởi a và b có thể cắt nhau.

e. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). B; d). A; e). B; f). A.

a. Mệnh đề này sai, bởi (P) có thể chứa b.

b. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

c. Mệnh đề này sai, bởi (P) có thể song song với b.

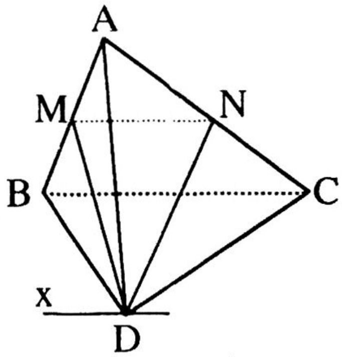
d. Mệnh đề này đúng, bởi giả sử: $a \cap (P) = \{M\} \Rightarrow (a, b) \cap (P) = Mx$.

Trong mặt phẳng (a, b) vì a song song với b và a cắt Mx tại M nên b cũng sẽ cắt Mx tại N. Vậy, ta được $b \cap (P) = \{N\}$.

e. Mệnh đề này sai, bởi khi đó (P) sẽ cắt b.

f. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.



a. Nhận xét rằng: $MN \parallel BC \subset (BCD) \Rightarrow MN \parallel (BCD)$.

b. Ta có:

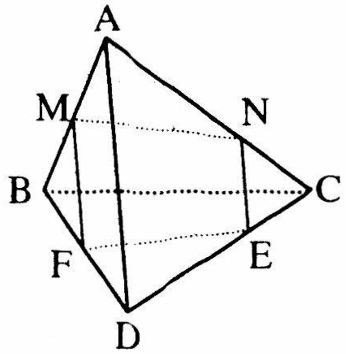
$$\begin{cases}(ABC)\cap(BCD) = BC\\(ABC)\cap(DMN) = MN\\(BCD)\cap(DMN) = d\\MN \parallel BC\end{cases} \Rightarrow d \parallel MN \parallel BC \subset (ABC) \Rightarrow d \parallel (ABC).$$

Bài 22: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A; c). A.

a. Thiết diện có thể là hình thang, cụ thể nếu mặt phẳng chứa MN (với $M \in AB$ và $N \in AC$) và song song với AD.

Khi đó, thiết diện được xác định như sau:

- Trong (ABD) kẻ Mx song song với AD và cắt BD tại F.
- Trong (ACD) kẻ Ny song song với AD và cắt BD tại E.



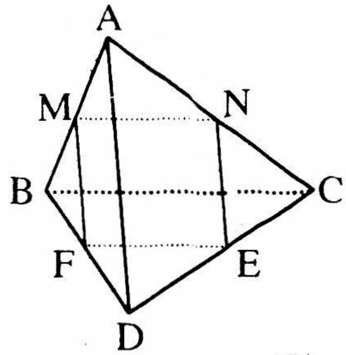
Từ đó, suy ra:

NE // MF ⇒ MNEF là hình thang.

b. Thiết diện có thể là hình bình hành, cụ thể nếu mặt phẳng đi M (với $M \in AB$) song song với AD và BC.

Khi đó, thiết diện được xác định như sau:

- Trong (ABC) kẻ Mt song song với BC và cắt AC tại N.
- Trong (ABD) kẻ Mx song song với AD và cắt BD tại F.
- Trong (ACD) kẻ Ny song song với AD và cắt CD tại E.



Khi đó, từ cách dựng ta suy ra MF // NE. (1)

Mặt khác, ba mặt phẳng (MNEF), (ABC) và (BCD) cắt nhau theo ba giao tuyến MN, BC, EF và MN // BC nên MN // EF. (2)

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện MNEF là hình bình hành.

c. Thiết diện có thể là hình thoi, cụ thể với thiết diện được dựng như trong câu b). Khi đó, để MNEF là hình thoi điều kiện là: MN = MF. (*)

Ta có: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MN = \dfrac{AM.BC}{AB}$. (3)

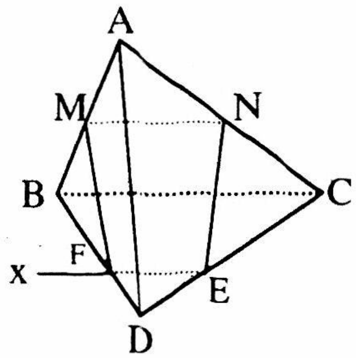
$\dfrac{MF}{AD} = \dfrac{BM}{AB} \Rightarrow MF = \dfrac{AD.BM}{AB}$. (4)

Khi đó, điều kiện (*) trở thành: $\dfrac{AM.BC}{AB} = \dfrac{AD.BM}{AB} \Leftrightarrow \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AD}{BC}$.

Vậy, mặt phẳng (P) đi qua điểm M (với $M \in AB$ sao cho $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AD}{BC}$) song song với AD và BC sẽ cắt tứ diện theo một thiết diện là hình thoi.

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Ta có:

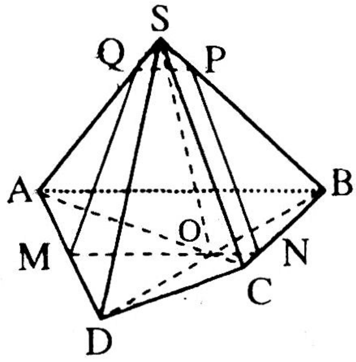


$$\begin{cases} (ABC) \cap (BCD) = BC \\ (ABC) \cap (MNE) = MN \\ (BCD) \cap (MNE) = Ex \\ MN // BC \end{cases} \Rightarrow Ex // MN // BC.$$

Giả sử Ex cắt BD tại F. Vậy, thiết diện là hình thang MNEF.

Bài 24:

a. Thiết diện được xác định bằng cách:



- Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ Ox song song với AB, Ox cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N.
- Trong mặt phẳng (SBC) kẻ Ny song song với SC, Ny cắt SB tại P.
- Trong mặt phẳng (SAB) kẻ Pz song song với AB, Pz cắt SA tại Q.

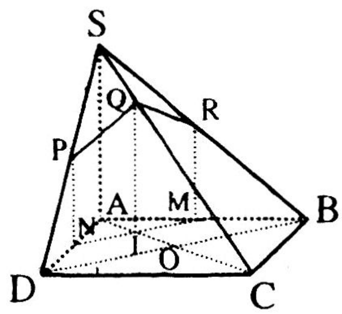
Khi đó, tứ giác MNPQ là thiết diện cần dựng.

b. *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Bởi MN và PQ cùng song song với AB nên:

MN // PQ $\Rightarrow$ MNPQ là hình thang.

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* C.



Lời giải tự luận: Thiết diện được xác định bằng cách:

- Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ Mx song song với BD, Mx cắt AC và AD theo thứ tự tại I và N.
- Trong mặt phẳng (SAB) kẻ My song song với SA, My cắt SB tại R.
- Trong mặt phẳng (SAC) kẻ Iz song song với SA, Iz cắt SC tại Q.
- Trong mặt phẳng (SAD) kẻ Nt song song với SA, Nt cắt SD tại P.

Khi đó, ngũ giác MNPQR là thiết diện cần dựng.

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). A; d). B; e). B; f). A.

a. Mệnh đề này sai, bởi theo hệ quả 2 của bài học 3 thì hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.

b. Mệnh đề này đúng theo hệ quả 2.

c. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

d. Mệnh đề này sai, bởi hai đường thẳng như vậy có thể chéo nhau

e. Mệnh đề này sai, bởi hai mặt phẳng đó có thể cắt nhau.

f. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 27: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). B; d). A; e). A.

a. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

b. Mệnh đề này sai, bởi cạnh bên không thể song song với cạnh đáy.

c. Mệnh đề này sai, bởi khi hai cạnh đáy không bằng nhau thì hai mặt bên tương ứng cũng không bằng nhau.

d. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

e. Mệnh đề này đúng – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 28: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Nếu a và b cùng song song với mặt phẳng (P) thì chúng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Lấy đường thẳng a bất kì thuộc (α).

Giả sử trái lại a không song song với (β), suy ra:

$$a \cap (\beta) = \{M\} \Rightarrow M \text{ là điểm chung của } (\alpha) \text{ và } (\beta) \text{ – Mâu thuẫn.}$$

Vậy, nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

Bài 30: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng: - Mặt phẳng (M, a) là duy nhất.

- Mặt phẳng (M, b) là duy nhất.
- Vì $(M, a) \neq (M, b)$ bởi a và b chéo nhau nên $(M, a) \cap (M, b) = Mx$.

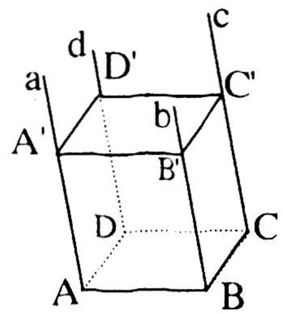
Khi đó:

- Mx không thể song song với a (vì nếu trái lại thì Mx và b sẽ chéo nhau – mâu thuẫn (Mx, b)) do đó Mx cắt a.
- Mx không thể song song với b (vì nếu trái lại thì Mx và a sẽ chéo nhau – mâu thuẫn (Mx, a)) do đó Mx cắt b.

Vậy, có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Nhận xét rằng:



$$\begin{cases} (a, b) // (c, d) \\ (A'B'C'D') \cap (a, b) = A'B' \\ (A'B'C'D') \cap (c, d) = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' // C'D'.$$

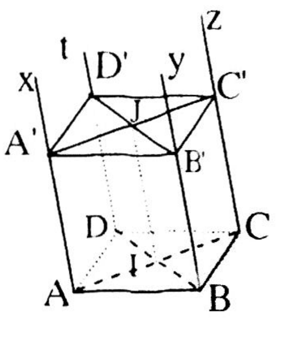
$$\begin{cases} (a, d) // (b, c) \\ (A'B'C'D') \cap (a, d) = A'D' \\ (A'B'C'D') \cap (b, c) = B'C' \end{cases} \Rightarrow A'D' // B'C'.$$

Từ đó, suy ra A'B'C'D' là hình bình hành.

Bài 32: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 33: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 34:



a. Nhận xét rằng: $\begin{cases} Ax // Cz \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (Ax, By) // (Cz, Dt).$

b. Nhận xét rằng:

$$\begin{cases} (a, b) // (c, d) \\ (A'B'C'D') \cap (a, b) = A'B' \\ (A'B'C'D') \cap (c, d) = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' // C'D'.$$

$$\begin{cases} (a, d) // (b, c) \\ (A'B'C'D') \cap (a, d) = A'D' \\ (A'B'C'D') \cap (b, c) = B'C' \end{cases} \Rightarrow A'D' // B'C'.$$

Từ đó, suy ra A'B'C'D' là hình bình hành.

Suy ra IJ là đường trung bình của hình thang AA'C'C, do đó IJ // AA'.

c. *Đáp số trắc nghiệm* B.

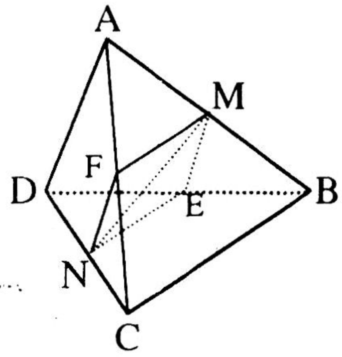
Lời giải tự luận: Từ kết quả câu b), ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}(AA' + CC') = \frac{1}{2}(BB' + DD') \Rightarrow DD' = AA' + CC' - BB' = x + y - z.$$

Bài 35: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Mặt phẳng (P) có đi qua trung điểm N của CD, bởi:

- Mặt phẳng (Q) chứa AD và song song với BC.
- Mặt phẳng (R) chứa BC và song song với AD.



Khi đó, ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song với nhau sẽ chắn trên hai cát tuyến AB và CD các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, cụ thể:

$$\frac{AM}{DN} = \frac{BM}{CN} = \frac{AB}{DC} \Rightarrow \frac{DN}{CN} = \frac{AM}{BM} = 1$$

$\Rightarrow DN = CN \Rightarrow$ N là trung điểm CD.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 39:

a. Giả sử: $AC' \cap A'C = \{N\} \Rightarrow$ N là trung điểm AC' và A'C

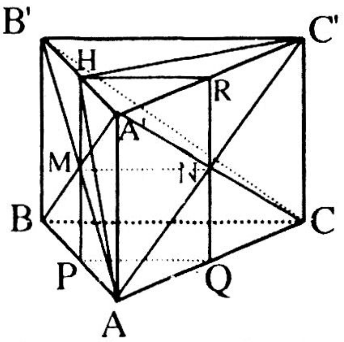
$\Rightarrow B'C \mathbin{/\!/} NH$ – tính chất đường trung bình $\Rightarrow B'C \mathbin{/\!/} (AHC')$, đpcm.

b. Giả sử: $AB' \cap A'B = \{M\} \Rightarrow (A'B'C') \cap (A'BC) = MN$.

Từ tính chất đường trung bình, suy ra:

$MN \mathbin{/\!/} BC \subset (BB'C'C) \Rightarrow MN \mathbin{/\!/} (BB'C'C)$, đpcm.

c. *Đáp số trắc nghiệm* C.



Lời giải tự luận: Nối MH cắt AB tại P (P là trung điểm AB), khi đó: $(H, d) \cap (ABC) = Px \mathbin{/\!/} MN \mathbin{/\!/} BC$,

$\Rightarrow$ Px cắt AC tại Q (Q là trung điểm AC).

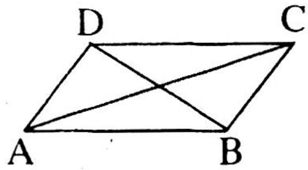
$(H, d) \cap (A'B'C') = Hy \mathbin{/\!/} MN \mathbin{/\!/} BC \mathbin{/\!/} B'C'$

$\Rightarrow$ Hy cắt A'C' tại R (R là trung điểm A'C').

Khi đó, ta được thiết diện là hình bình hành HPQR.

Bài 40: Trước tiên ta đi chứng minh mệnh đề "*Tổng bình phương các đường chéo của một hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh*".

Thật vậy, với hình bình hành ABCD, theo định lí hàm số côsin ta có:



$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{ABC}$. (1)

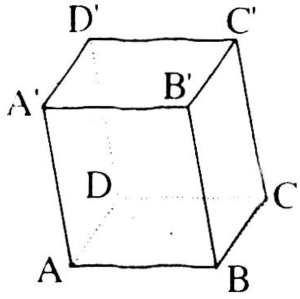
$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2CD.CB.\cos\widehat{BCD}$. (2)

$= CD^2 + DA^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{BCD}$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2AB.BC.(\cos\widehat{ABC} + \cos\widehat{BCD})$$
$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2, \text{ đpcm.}$$

Sử dụng mệnh đề trên, ta thấy:



$$A'C^2 + C'A^2 + D'B^2 + B'D^2 =$$
$$= A'A^2 + AC^2 + C'C^2 + C'A'^2 +$$
$$+ BD^2 + D'D^2 + D'B'^2 + B'B^2$$
$$= (A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2) +$$
$$(AC^2 + BD^2) + (A'C'^2 + B'D'^2)$$
$$= (A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2) + (AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) +$$
$$+ (A'B'^2 + B'C'^2 + C'D'^2 + A'D'^2), \text{ đpcm.}$$

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

a. Đúng, khi ta chiếu chúng theo phương chiếu là một đường thẳng song song với mặt phẳng (P), biết (P) song song với hai đường thẳng chéo nhau đó.

b. Sai – *Bạn đọc tự giải thích.*

Bài 43: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

a. Sai, vì phép chiếu song song bảo toàn tính song song của các đường thẳng.

b. Sai, bởi chúng có thể trùng nhau.

Bài 44: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Đúng, bởi khi ta chiếu theo phương chiếu là một đường thẳng song song với mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau đó.

b. Đúng, khi mặt phẳng chiếu song song với đường thẳng đó.

Bài 45: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

a. Sai – *Bạn đọc tự giải thích.*

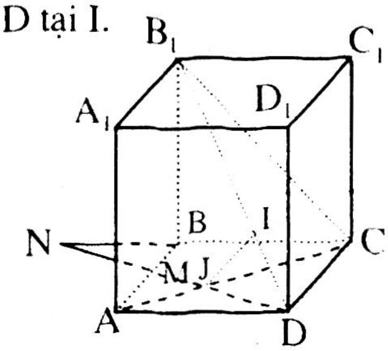
b. Đúng, khi mặt phẳng chiếu chứa đường thẳng đó.

Bài 46: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Thực hiện phép chiếu song song:

- Mặt phẳng chiếu (ABCD) và phương chiếu BC_1.
- Ta nhận được ảnh của B_1 là điểm N.
- Nối ND cắt AB và AC theo thứ tự tại M và J.
- Qua J kẻ đường thẳng song song với B_1N cắt B_1D tại I.

Suy ra $IJ \parallel BC_1$.



Từ cách dựng, ta có:

BNB_1C_1 là hình bình hành $\Rightarrow BN = B_1C_1$.

Từ đó: $\dfrac{JD}{JN} = \dfrac{AD}{CN} = \dfrac{1}{2}$.

Trong ΔNDB_1, ta có: $\dfrac{ID}{IB_1} = \dfrac{JD}{JN} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 47: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). A; d). B.

a. Đúng.

b. Sai, bởi hai đường thẳng song song cũng không có điểm chung.

c. Đúng.

d. Sai, bởi hai đường thẳng song song thì đồng phẳng còn hai đường thẳng chéo nhau thì không đồng phẳng.

Bài 48: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). A; d). A; e). B; f). A; g). A.

a. Sai, bởi khi đó chúng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau

b. Sai, bởi nếu hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến a và a // b thì hai mặt phẳng đó đều song song với b.

c. Đúng.

d. Đúng.

e. Sai, bởi với hình hộp ABCD.A'B'C'D' thì AB cắt AD nhưng không cắt A'D'.

Bài 49: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 50: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 51: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 52: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 53: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 54: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 55: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 56: *Đáp số trắc nghiệm* B.

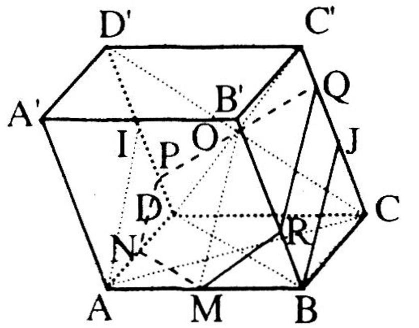
Bài 57: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 58: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 59: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 60: Ta lần lượt thực hiện:

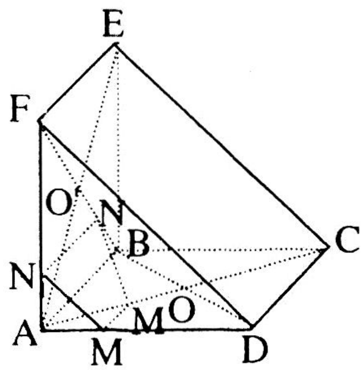
- Nối MO.
- Trong (AA'D'D) kẻ NP // AI với I là trung điểm DD' (ta có AI // MO).
- Trong (CC'D'D) nối PO cắt CC' tại Q.
- Trong (CC'B'B) kẻ QR // BJ với J là trung điểm CC' (ta có BJ // MO).
- Nối MR.



Khi đó, thiết diện là ngũ giác MNPQR.

Bài 61: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 62:



a. Từ giả thiết, ta suy ra:

AM = 2MO $\Rightarrow$ M là trọng tâm ΔABD.

BN = 2NO $\Rightarrow$ M là trọng tâm ΔABE.

Suy ra DM $\cap$ EN = {I} là trung điểm của AB

và ta có: $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel DE$, đpcm.

b. Ta có nhận xét: $\dfrac{AM_1}{AD} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AN_1}{AF} \Rightarrow M_1N_1 \parallel DF$ (1)

$\Rightarrow M_1N_1 \parallel (DEF)$, đpcm.

c. Mặt khác, ta có: MM' // CD. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: (MNN'M') // (DEF).

Bài 63:

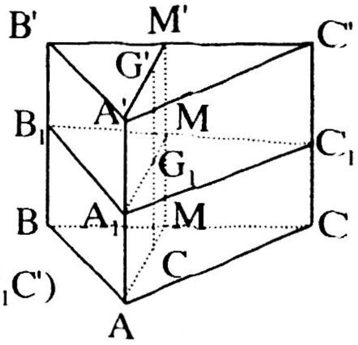
a. Gọi M và M' theo thứ tự là trung điểm của BC và B'C, suy ra:

$$MM' \overset{//}{=} BB' \overset{//}{=} CC' \overset{//}{=} AA',\ MM' \cap B_1C_1 = \{M_1\}, \text{ với } M_1 \text{ là trung điểm } B_1C_1.$$

Trong (AA'M'M), ta có: $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{AG'}{AM'} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GG' \overset{//}{=} MM'$,

từ đó, suy ra GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ.

b. Ta có: $\frac{A_1G_1}{A_1M_1} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ (*)



$\Rightarrow G_1$ là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

c. Từ kết quả (*), ta có:

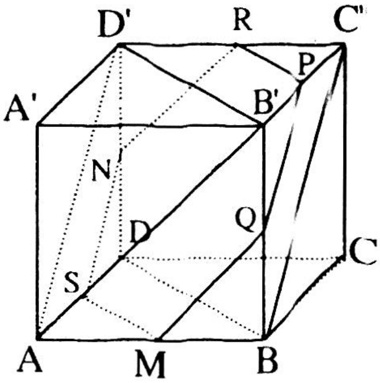
$$G_1G' = \frac{1}{3}A_1A' + \frac{2}{3}M_1M' = \frac{1}{3}A_1A' + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}(B_1B' + C_1C')$$

$$= \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C').$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Bài 64:

a. Từ giả thiết: $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D}$



suy ra MN, AD', BD thuộc ba mặt phẳng đôi một song song với nhau. Vì bởi BD // B'D' nên:

MN // (AB'D'). (1)

Từ giả thiết: $\frac{AM}{AB} = \frac{B'P}{B'C'}$

suy ra MP, AB', BC' thuộc ba mặt phẳng đôi một song song với nhau. Vì bởi BC' // AD' nên: MP // (AB'D'). (2)

Từ (1) và (2), suy ra (MNP) // (AB'D').

b. Để có được thiết diện, ta thực hiện:

- Kẻ Mx // BD và cắt AD tại S.
- Nối SN.
- Kẻ Py // B'D' và cắt C'D' tại R.
- Kẻ Pz // BC' và cắt BB' tại Q.

Khi đó, lục giác MSNRPQ là thiết diện cần dựng.

Bài 65:

a. Gọi M_0, N_0 lần lượt là hai điểm cố định thuộc các tai Ax, By sao cho:

$\frac{AM_0}{BN_0} = k.$

Từ đó, suy ra: $\frac{AM_0}{BN_0} = \frac{AM}{BN}$

$\Rightarrow$ MN, M_0N_0, AB theo thứ tự thuộc ba mặt phẳng đôi một song song với nhau.

Vậy, ta có kết luận rằng MN song song với mặt phẳng cố định (P) chứa M_0N_0 và song song với AB.

b. Gọi O là điểm thuộc AB, sao cho: $\frac{AO}{BO} = k$

từ đó kẻ Ox' và Oy' theo thứ tự song song với Ax và By.

Từ đó, theo tính chất đường phân giác ta có kết luận tập hợp các điểm I là tia phân giác Oz của góc $\widehat{x'Oy'}$.

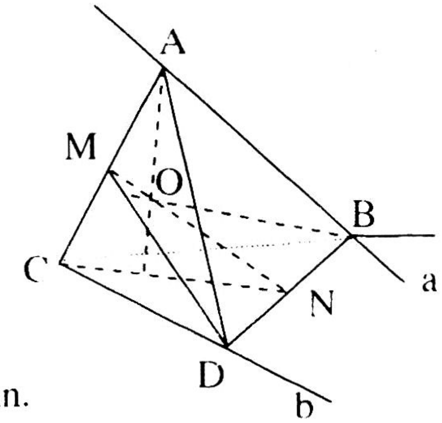
Bài 66:

a. Giả sử AC và BD không chéo nhau, suy ra:

AC và BD đồng phẳng $\Rightarrow$ AB và CD đồng phẳng

điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy, ta có AC và BD chéo nhau.



b. MN không thể song song với AB hoặc CD bởi:

- Nếu MN // AB thì: MN và AB đồng phẳng

  $\Rightarrow$ AM và BN đồng phẳng

  $\Leftrightarrow$ AC và BD đồng phẳng

điều đó mâu thuẫn.

- Nếu MN // CD thì: MN và CD đồng phẳng

  $\Rightarrow$ CM và DN đồng phẳng

  $\Leftrightarrow$ AC và BD đồng phẳng, mâu thuẫn.

c. Ta lần lượt:

- *Chứng minh AO cắt CN*: Ta có: $O \in MN \Rightarrow O \in (CMN)$ và $A \in CM$

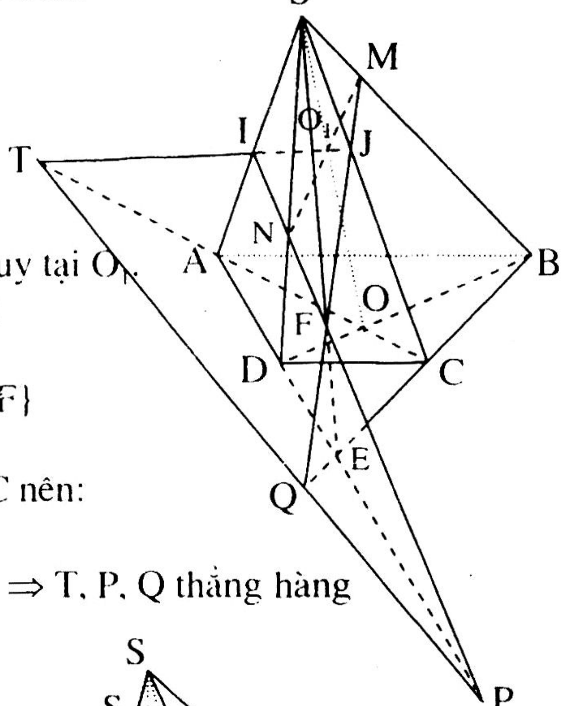
$\Rightarrow A \in (CMN) \Rightarrow$ AO và CN đồng phẳng.

Ngoài ra, AO và CN không thể song song với nhau bởi nếu: AO // CN

$\Rightarrow$ O nằm ngoài đoạn MN, mâu thuẫn với giả thiết. Vậy, ta có kết luận AO cắt CN.

- Tương tự ta chứng minh được BO cắt DM.

Bài 67:



a. Giả sử $IJ \cap SO = O_1$.

Ta có: $O_1 \in IJ \subset \beta \Rightarrow O_1 \in \beta$,

$O_1 \in SO \subset (SBD) \Rightarrow O_1 \in (SBD)$.

Suy ra: $O_1 \in \beta \cap (SBD) = MN$.

Vậy, ba đường thẳng IJ, MN, SO đồng quy tại O_1.

Như vậy, khi biết điểm M ta chỉ cần nối MO_1 cắt SD tại N.

b. Nhận xét rằng: $(SAD) \cap (SBC) = \{S, E, F\}$

$\Rightarrow$ S, E, F thẳng hàng.

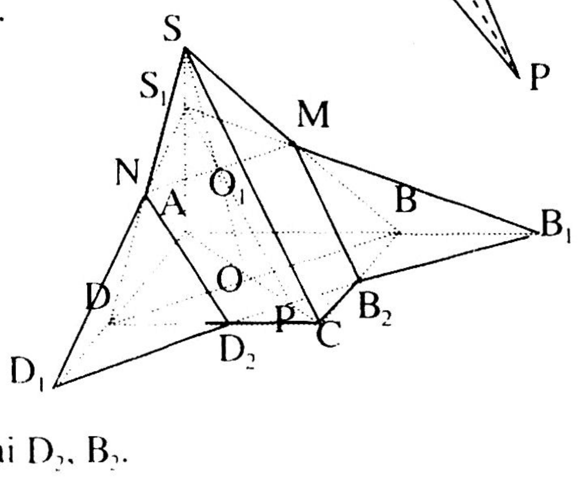
c. Trước tiên, vì IJ không song song với AC nên:

$IJ \cap AC = T$ – là một điểm cố định.

Nhận xét rằng: $\beta \cap (ABCD) = \{T, P, Q\} \Rightarrow$ T, P, Q thẳng hàng

$\Leftrightarrow$ PQ luôn đi qua điểm cố định T.

Bài 68:



a. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối MN cắt SO tại O_1.
- Nối O_1P cắt SA tại S_1.

Vậy, ta được: $(MNP) \cap (SAC) = PS_1$.

$(MNP) \cap SA = S_1$.

b. Ta lần lượt thực hiện:

- Nối S_1N kéo dài cắt AD tại D_1.
- Nối S_1M kéo dài cắt AB tại B_1.
- Nối B_1D_1 cắt CD, CB theo thứ tự tại D_2, B_2.

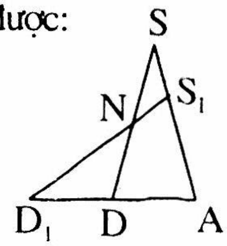
Khi đó, ta được 5 đoạn giao tuyến là S_1M, MB_2, B_2D_2, D_2N và NS_1. Do đó thiết diện cần tìm là đa giác $S_1MB_2D_2N$.

c. Ta lần lượt có:

- MN là đường trung bình của ΔSBD nên O_1 là trung điểm SO, suy ra:

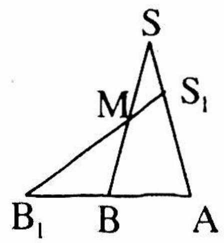
$$PO_1 // SC \Rightarrow \frac{S_1S}{S_1A} = \frac{PC}{PA} = \frac{1}{3}.$$

- Xét ΔSAD với S_1, N, D_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:



$$\frac{NS}{ND}.\frac{D_1D}{D_1A}.\frac{S_1A}{S_1S} = 1 \Rightarrow \frac{D_1D}{D_1A} = \frac{1}{3}. \quad (1)$$

- Xét ΔSAB với S_1, M, B_1 thẳng hàng, theo định lí Mêlêlaus, ta được:



$$\frac{MS}{MB}.\frac{B_1B}{B_1A}.\frac{S_1A}{S_1S} = 1 \Rightarrow \frac{B_1B}{B_1A} = \frac{1}{3}. \quad (2)$$

Từ (1), (2), suy ra:

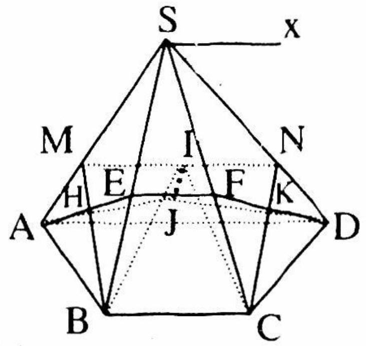
$BD // B_1D_1 \Rightarrow B_2D_2$ là đường trung bình của ΔCBD

$\Rightarrow$ nên B_2, D_2 theo thứ tự là trung điểm BC, CD

do đó: $\frac{D_2D}{D_2C} = 1$ và $\frac{B_2B}{B_2C} = 1$.

Chú ý: Định lí Mêlêlaus có nội dung như sau: " *Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC (hoặc trên phần kéo dài của chúng) lấy các điểm C_1, A_1, B_1 thì C_1, A_1, B_1 thẳng hàng khi và chỉ khi:* $\frac{A_1B}{A_1C}\frac{B_1C}{B_1A}\frac{C_1A}{C_1B} = 1$ ".

Bài 69:



a. Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (SAD) \cap (SBC) = Sx \end{cases} \Rightarrow Sx // AD // BC.$$

b. Ta có: $\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } BC \in (BCI) \\ AD // BC \\ (SAD) \cap (BCI) = Iy \end{cases} \Rightarrow Iy // AD // BC$

và Iy cắt SA, SD theo thứ tự tại M, N.

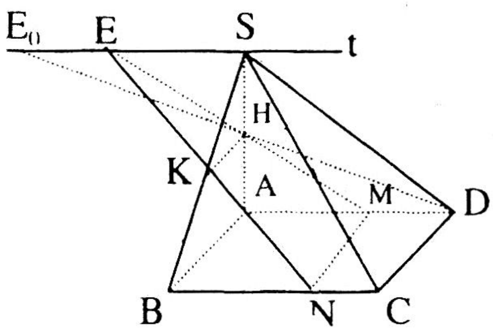
c. Ta có: $\begin{cases} AD \in (ADJ) \text{ và } BC \in (SBC) \\ AD // BC \\ (ADJ) \cap (SBC) = Jz \end{cases} \Rightarrow Jz // AD // BC$

và Jz cắt SB, SC theo thứ tự tại E, F.

d. Giả sử AE cắt BM tại H và CN cắt DF tại K, và ta cần đi tính độ dài HK.

Bạn đọc tự làm dựa trên định lí Ta − lét, đáp số $HK = \frac{2}{5}(a + b)$.

Bài 70:



a. Ta có:

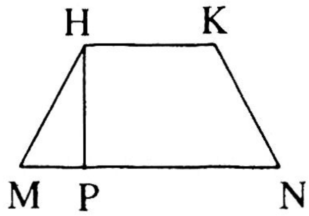
$$\begin{cases} KH \in (MNKH) \text{ và } AB \in (ABCD) \\ KH // AB \\ (MNKH) \cap (ABCD) = MN \end{cases}$$

$\Rightarrow MN // AB // KH.$ (1)

Mặt khác, ta lại có: $\Delta SAD = \Delta SBC$ (c.c.c) $\Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SBC}$

$\Rightarrow \Delta HAM = \Delta KBN$ (c.g.c) $\Rightarrow MH = NK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra MNKH là hình thang cân.



b. Ta có ngay: $MN = a$ và $KH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$

Trong ΔSAD, ta có:

$$\cos\widehat{SAD} = \frac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA.AD} = \frac{+a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Trong ΔHAM, ta có: $MH^2 = AH^2 + AM^2 - 2AH.AM.\cos\widehat{HAM}$

$$= \frac{a^2}{4} + x^2 - 2.\frac{a}{2}.x.(-\frac{1}{2}) = \frac{a^2}{4} + x^2 + \frac{ax}{2}$$

$$\Rightarrow MH = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 2ax + a^2}.$$

Trong hình thang cân MNKH, gọi P là chân đường cao hạ từ H, ta có:

$$HP = \sqrt{MH^2 - MP^2}$$

$$= \sqrt{MH^2 - \left(\frac{MN - HK}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

$$S_{MNKH} = \frac{1}{2}(MN + KH)HP = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{2}).\frac{1}{4}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}$$

$$= \frac{3a}{16}\sqrt{16x^2 - 8ax + 3a^2}.$$

Ta có biến đổi: $S_{MNKH} = \frac{3a}{16}\sqrt{(4x - a)^2 + 2a^2} \geq \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}.$

Vậy, ta được $(S_{MNKH})_{Min} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$ đạt được khi $x = \frac{a}{4}$.

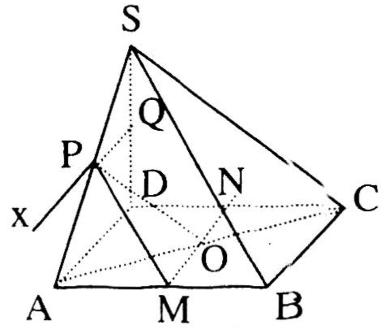
c. *Hướng dẫn*: Quĩ tích là đoạn SE_0 trên St // AD.

Bài 71:

a. Trong hình bình hành ABCD, ta có MN là đường trung bình, do đó:

$MN \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

$MN \parallel AD \subset (SAD) \Rightarrow MN \parallel (SAD)$.



b. Trong ΔSAB, ta có MP là đường trung bình, do đó:

$SB \parallel MP \subset (MNP) \Rightarrow SB \parallel (MNP)$.

c. Ta có thể lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} AD \in (SAD) \text{ và } MN \in (MNP) \\ AD \parallel MN \\ (SAD) \cap (MNP) = Px \end{cases} \Rightarrow Kx \parallel AD \parallel MN.$$

Giả sử Px cắt SD tại Q, suy ra Q là trung điểm SD.

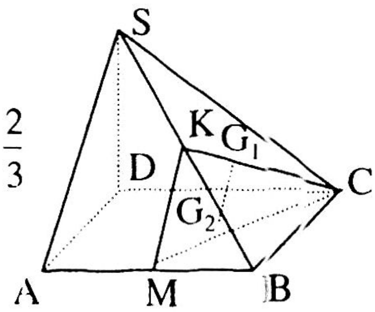
Trong ΔSCD, ta có NQ là đường trung bình, do đó:

$SC \parallel NQ \subset (MNP) \Rightarrow SC \parallel (MNP)$.

Cách 2: Gọi O là trung điểm MN, suy ra O là trung điểm AC.

Trong ΔSAC, ta có OP là đường trung bình, do đó:

$SC \parallel OP \subset (MNP) \Rightarrow SC \parallel (MNP)$.



d. Gọi K là trung điểm SB. Ta có: $\frac{CG_1}{CK} = \frac{2}{3}$ và $\frac{CG_2}{CM} = \frac{2}{3}$

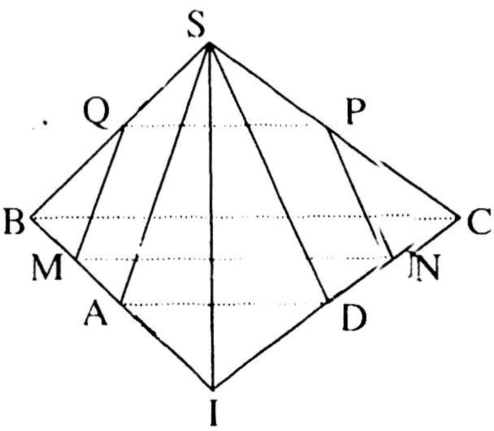
$\Rightarrow G_1G_2 \parallel MK$. (1)

Mặt khác, trong ΔSAB, ta có MK là đường trung bình, do đó: $MK \parallel SA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $G_1G_2 \parallel SA \subset (SAD) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (SAD)$.

Bài 72:

a. Ta lần lượt có:



$$\begin{cases} SA \parallel \alpha \\ SA \subset (SAB) \\ MQ \in (SAB) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow MQ \parallel SA.$$

$$\begin{cases} BC \parallel \alpha \\ MN \in (ABCD) \cap \alpha \\ PQ \in (SBC) \cap \alpha \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ \parallel BC.$$

Nhận xét rằng: $\frac{MQ}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CN}{CD} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SD} \overset{SA=SD}{\Rightarrow} MQ = NP$.

Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

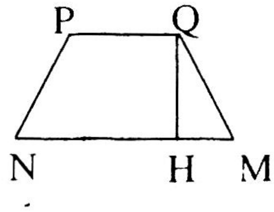
b. Giả sử AB cắt CD tại I, ta có:

$$AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC \Rightarrow AD \text{ là đường trung bình của } \Delta IBC$$

do đó IA = AB = b và: $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IA + AM}{IA + AB} = \dfrac{b + x}{2b} \Rightarrow MN = \dfrac{a(b + x)}{b}$.

Trong ΔSBC, ta có: $\dfrac{PQ}{BC} = \dfrac{SQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{b} \Rightarrow PQ = \dfrac{2ax}{b}$.

Trong ΔSAB, ta có: $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{b - x}{b} \Rightarrow MQ = \dfrac{a(b - x)}{b}$.



Xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a(b - x)}{2b}.$$

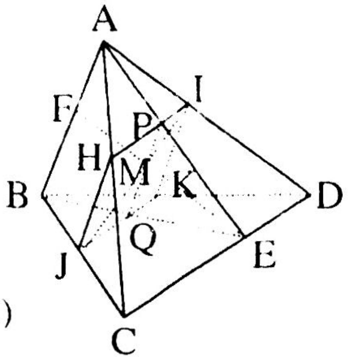
$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).QH = \frac{1}{2}\left[\frac{a(b + x)}{b} + \frac{2ax}{b}\right].\frac{\sqrt{3}a(b - x)}{2b}$$

$$= \frac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.(b + 3x)(b - x).$$

Ta biến đổi: $S_{MNPQ} = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\left[\dfrac{4b^2}{3} - \left(x\sqrt{3} - \dfrac{b}{\sqrt{3}}\right)^2\right] \le \dfrac{\sqrt{3}a^2}{4b^2}.\dfrac{4b^2}{3} = \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$.

Vậy $(S_{MNPQ})_{Max} = \dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$, đạt được khi:

$$x\sqrt{3} - \frac{b}{\sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{b}{3}.$$



Bài 73:

a. Dựng JH // AB, H ∈ AC. (1)

Nhận xét rằng: $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{JB}{JC} = \dfrac{IA}{ID} \Rightarrow HI // CD$. (2)

Gọi α là mặt phẳng chứa AB và song song với CD, suy ra α là mặt phẳng cố định và (HIJ) // α.

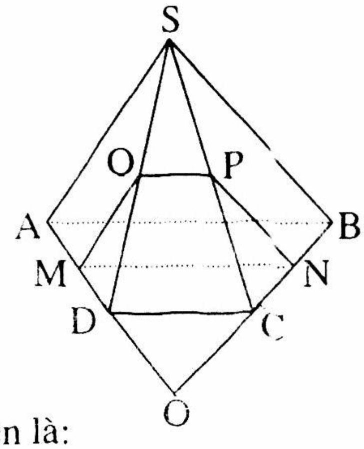
b. Giả sử (HIJ) cắt BD tại K, dễ thấy HIKJ là hình bình hành. Qua M kẻ PQ song song với AB (P ∈ HI và Q ∈ JK). Ta có: $AP \cap BQ = E$ và $EM \cap AB = F$.

Nhận xét rằng: $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{PI}{PH} = \dfrac{MI}{MJ} = k \Rightarrow$ E là điểm chia CD theo tỉ số k.

$\dfrac{FA}{FB} = \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MI}{MJ} = k \Rightarrow$ F là điểm chia AB theo tỉ số k.

Vậy, tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k là đoạn EF với E, F lần lượt l điểm chia CD và AB theo tỉ số k.

Bài 74:



a. Ta lần lượt có: $\begin{cases} \alpha // (SAB) \\ MN = \alpha \cap (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap \end{cases} \Rightarrow MN // AB.$

Lập luận tương tự ta cũng có:

$NP // BS$, $PQ // CD$, $QM // SA$.

Nhận xét rằng: $MN // PQ$ bởi $AB // CD$.

$$\frac{MQ}{SA} = \frac{DQ}{DS} = \frac{CP}{CS} = \frac{NP}{SB} \overset{SA=SB}{\Longrightarrow} MQ = NP.$$

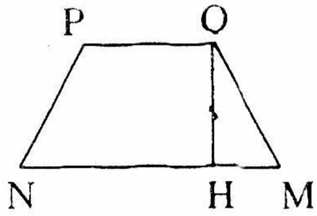
Vậy, thiết diện MNPQ là hình thang cân.

b. Để MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn điều kiện là:

$$MN + PQ = MQ + NP \Leftrightarrow MN + PQ = 2MQ. \qquad (1)$$

Trong ΔSAD, ta có: $\dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x). \qquad (2)$

Trong ΔSCD, ta có: $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow PQ = x. \qquad (3)$



Giả sử AB cắt CD tại O và OD = y, ta có:

$$\frac{OD}{OA} = \frac{CD}{AB} = \frac{a}{3a} \Rightarrow 3y = a + y \Leftrightarrow y = \frac{a}{2}.$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{OM}{OA} = \frac{OD + DM}{OD + DA} = \frac{\frac{a}{2} + a - x}{\frac{a}{2} + a} \Rightarrow MN = 3a - 2x. \qquad (4)$$

Thay (2), (3) và (4) vào (1), ta được: $3a - 2x + x = 4(a - x) \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Vậy, với $x = \dfrac{a}{3}$ thì MNPQ ngoại tiếp được một đường tròn.

Khi đó, xét hình thang cân MNPQ, hạ đường cao QH, ta có:

$$QH = \sqrt{MQ^2 - MH^2} = \sqrt{MQ^2 - \left(\frac{MN - PQ}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

suy ra bán kính đường tròn nội tiếp MNPQ là $r = \dfrac{1}{2}QH = \dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

Câu c) và d) học sinh tự làm.

Bài 75:

a. Từ giả thiết, ta được:

$$MM_1 \overset{//}{=} BB_1 \overset{//}{=} AA_1 \Leftrightarrow AMM_1A_1 \text{ là hình bình hành} \Rightarrow AM // A_1M_1.$$

b. Chọn mặt phẳng phụ (AMM_1A_1) chứa A_1M.

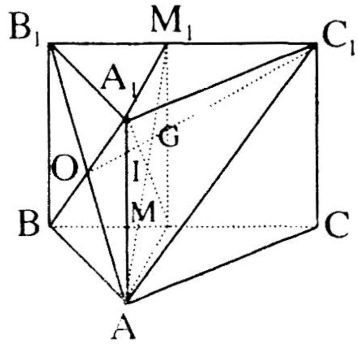
Nhận xét rằng: $(AMM_1A_1) \cap (AB_1C_1) = AM_1$

$AM_1 \cap A_1M = I$. suy ra $A_1M \cap (AB_1C_1) = I$.

c. Gọi $O = AB_1 \cap A_1B$, khi đó ta nhận được:

$(AB_1C_1) \cap (BA_1C_1) = OC_1$,

chính là đường thẳng d cần tìm.



d. Chọn mặt phẳng phụ (AB_1C_1) chứa d (chứa OC_1).

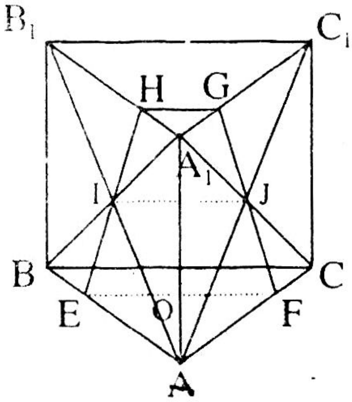
Nhận xét rằng:

$(AMA_1) \cap (AB_1C_1) = AM_1$

$AM_1 \cap OC_1 = G$.

suy ra $d \cap (AMA_1) = G$.

Dễ thấy G là trọng tâm ΔAB_1C_1, bởi trong ΔAB_1C_1 thì G là giao điểm của hai đường trung tuyến.



Bài 76:

a. Nhận xét rằng: $\frac{IA_1}{IB} = \frac{JA_1}{JC} = 1$

$\Rightarrow IJ // BC \subset (ABC) \Rightarrow IJ // (ABC)$.

b. Ta lần lượt có:

$$\begin{cases} IJ \in (IJO) \text{ và } BC \in (ABC) \\ IJ // BC \\ (IJO) \cap (ABC) = Ox \end{cases} \Rightarrow Ox // IJ // BC.$$

và Ox cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F.

Nối EI cắt A_1B_1 tại H và nối FI cắt A_1C_1 tại G. Như vậy, thiết diện là tứ giác EFGH.

Nhận xét rằng: $$\begin{cases} (ABC) // (A_1B_1C_1) \\ (IJO) \cap (ABC) = EF \\ (IJO) \cap (A_1B_1C_1) = GH \end{cases} \Rightarrow EF // GH \Rightarrow EFGH \text{ là hình thang.}$$

Vì ΔABC nên $AA_1B_1B = AA_1C_1C$, do đó EH = FG.

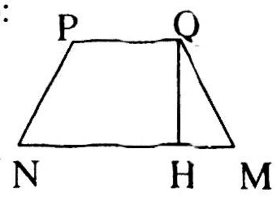
Vậy, thiết diện EFGH là hình thang cân.

- Trong ΔABC, ta có: $\frac{EF}{BC} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$.
- Trong $\Delta A_1B_1C_1$, ta có: $\frac{HG}{B_1C_1} = \frac{A_1H}{A_1B_1} = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HG = \frac{a}{3}$.
- Trong ΔIBE, ta có: $IE^2 = BI^2 + BE^2 - 2BI.BE.\cos\widehat{IBE}$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{3}.\cos45^0 = \frac{5a^2}{18}$$

$$\Rightarrow IE = \frac{a\sqrt{10}}{6} \Rightarrow EH = 2IE = \frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

Khi đó, xét hình thang cân EFGH, hạ đường cao HM, ta có:



$$HM = \sqrt{EH^2 - ME^2} = \sqrt{EH^2 - \left(\frac{EF - HG}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{6}.$$

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + HG).HM$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{39}}{6} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12}.$$

Chú ý: Trong lời giải trên:

a. Ở câu a), chúng ta có thể sử dụng nhận xét:

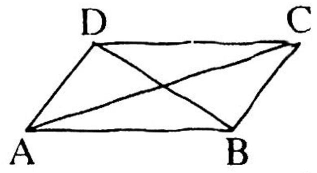
IJ là đường trung bình của $\Delta A_1BC \Leftrightarrow IJ \overset{//}{=} \frac{1}{2}BC$ (ta có $IJ = \frac{a}{2}$).

b. Khi đó, trong câu b), chúng ta có thể tính độ dài HG dựa tiên tính chất IJ là đường trung bình của hình thang EFGH như sau:

$$IJ = \frac{1}{2}(EF + HG) \Rightarrow HG = 2IJ - EF = 2.\frac{a}{2} - \frac{2a}{3} = \frac{a}{3}.$$

Bài 77: Trước tiên ta đi chứng minh mệnh đề "*Tổng bình phương các đường chéo của một hình bình hành bằng tổng bình phương các cạnh*".

Thật vậy, với hình bình hành ABCD, theo định lí hàm số côsin ta có:



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{ABC}. \quad (1)$$

$$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2CD.CB.\cos\widehat{BCD}. \quad (2)$$

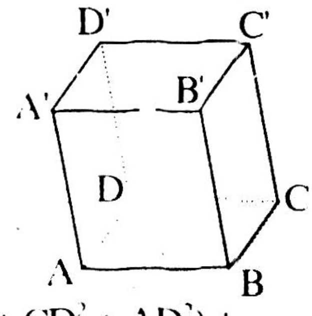
$$= CD^2 + DA^2 - 2AB.BC.\cos\widehat{BCD}. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2AB.BC.(\cos\widehat{ABC} + \cos\widehat{BCD})$$

$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2, \text{ đpcm.}$$

Sử dụng mệnh đề trên, ta thấy:



$$A'C^2 + C'A^2 + D'B^2 + B'D^2 =$$

$$= A'A^2 + AC^2 + C'C^2 + C'A'^2 +$$

$$+ BD^2 + D'D^2 + D'B'^2 + B'B^2$$

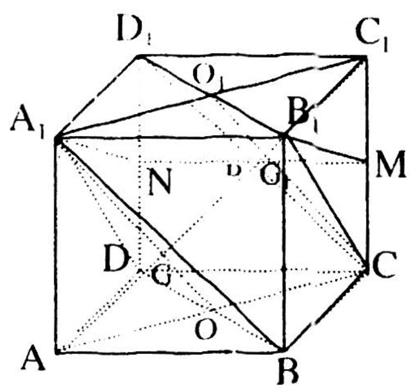
$$= (A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2) +$$

$$(AC^2 + BD^2) + (A'C'^2 + B'D'^2)$$

$$= (A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2) + (AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2) +$$

$$+ (A'B'^2 + B'C'^2 + C'D'^2 + A'D'^2), \text{ đpcm.}$$

Bài 78:



a. Gọi O, O_1 theo thứ tự là tâm của các hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$, ta có:

$$\begin{cases} A_1O // CO_1 \\ BD // B_1D_1 \end{cases} \Rightarrow (BDA_1) // (B_1D_1C).$$

b. Vì AC_1, AO, CO_1 cùng nằm trong mặt phẳng (ACC_1A_1) nên gọi:

$$G = AC_1 \cap A_1O \text{ và } G_1 = AC_1 \cap CO_1.$$

- Trong ΔA_1BD, điểm G thuộc trung tuyến A_1O và vì $AO \,//\, A_1C_1$ nên:

$$\frac{GO}{GA_1} = \frac{AO}{A_1C_1} = \frac{1}{2}$$

do đó, G là trọng tâm ΔA_1BD.

- Chứng minh tương tự G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

Nhận xét rằng OG, O_1G_1 theo thứ tự là đường trung bình của ΔACG_1 và ΔA_1C_1G nên: $AG = GG_1 = G_1C_1$

tức là G, G_1 chia đoạn AC_1 làm 3 phần bằng nhau.

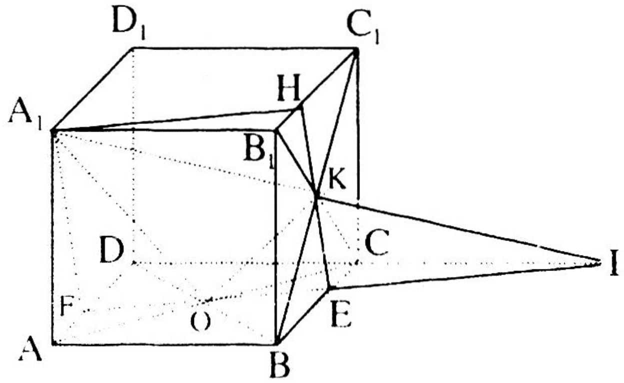
c. Kéo dài B_1G_1 cắt CD_1 tại P, ta có P là trung điểm của CD_1 vì G_1 là trọng tâm ΔCB_1D_1.

Ta có: $\begin{cases} A_1B_1 \in (A_1B_1G_1) \text{ và } C_1D_1 \in (CDD_1C_1) \\ A_1B_1 \,//\, C_1D_1 \\ (A_1B_1G_1) \cap (CDD_1C_1) = Px \end{cases} \Rightarrow Px \,//\, A_1B_1 \,//\, C_1D_1$

giả sử Px theo thứ tự cắt CC_1 và DD_1 tại M và N.

Khi đó, ta nhận được thiết diện A_1B_1MN là hình bình hành.

d. Ta lần lượt có:



- Trong (A_1B_1CD) giả sử:

$A_1K \cap DC = I$.

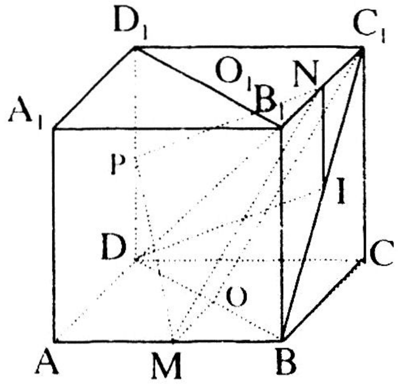
- Nối IO cắt BC và AD theo thứ tự tại E và F.
- Nối KE cắt B_1C_1 tại H.

Nối A_1F và A_1H nhận được thiết diện A_1FEH là hình bình hành.

Bài 79:

a. Gọi O, O_1, I theo thứ tự là tâm của các hình vuông ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ và BCC_1B_1.

Nhận xét rằng: $MO \overset{//}{=} \frac{1}{2}AD \overset{//}{=} \frac{1}{2}A_1D_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}B_1C_1 \overset{//}{=} NC_1$



$\Leftrightarrow MOC_1N$ là hình bình hành

$\Rightarrow MN \,//\, OC_1$. (1)

$NI \overset{//}{=} \frac{1}{2}BB_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}AA_1 \overset{//}{=} \frac{1}{2}DD_1 \overset{//}{=} PD$

$\Leftrightarrow$ NIDP là hình bình hành

$\Rightarrow PN \,//\, DI$. (2)

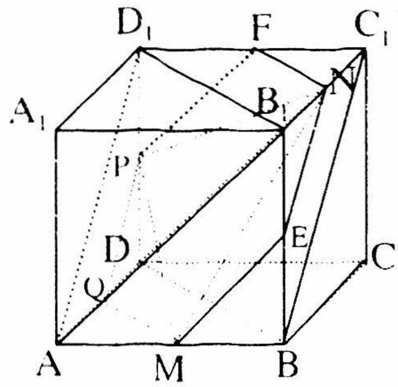
Từ (1) và (2) suy ra $(MNP) \,//\, (BDC_1)$.

Mặt khác: $\begin{cases} AO_1 \,//\, C_1O \\ B_1D_1 \,//\, BD \end{cases} \Rightarrow (AB_1D_1) \,//\, (BDC_1)$.

Vậy, (MNP) song song với các mặt phẳng (AB_1D_1) và (BDC_1).

b. Từ kết quả câu a), ta nhận xét:

$$\begin{cases}(AB_1D_1)//(MNP)\\(AB_1D_1)\cap(A_1B_1C_1D_1)=B_1D_1\\(MNP)\cap(A_1B_1C_1D_1)=Nx\end{cases}$$



suy ra Nx song song với B_1D_1 và cắt C_1D_1 tại F là trung điểm của C_1D_1.

$$\begin{cases}(C_1BD)//(MNP)\\(C_1BD)\cap(ABCD)=BD\\(MNP)\cap(ABCD)=My\end{cases}$$

suy ra My song song với BD và cắt AD tại Q là trung điểm của AD.

Kéo dài FN cắt A_1B_1 tai G, nối GM cắt BB_1 tại E.

Vậy, thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) là lục giác MENFPQ.

Dựa theo tính chất đường trung bình ta thấy ngay MENFPQ là lục giác đều có độ dài cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó: $S_{MENFPQ} = 6.\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 80:

a. Từ giả thiết, ta được: GK // AD, $AG \cap DK = E$ là trung điểm BC,

suy ra: $\dfrac{EK}{KD} = \dfrac{EG}{GA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ K là trọng tâm ΔBCD.

CHƯƠNG III.

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ VUÔNG GÓC

§ 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN
SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng, chúng có các tính chất đã biết.

Quy tắc hình hộp: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, ta luôn có:

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Trọng tâm của tứ diện: Điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

2. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ. ĐIỀU KIỆN ĐỂ BA VECTƠ ĐỒNG PHẲNG

Định nghĩa: *Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng song song với một mặt phẳng.*

Định lí 1 (*Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng*): Cho ba vectơ không cùng phương vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.

Định lí 2: Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng thì với vectơ $\vec{d}$ bất kì, ta đều tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa, các số m, n, p là duy nhất.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 1: Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra?

a. Có một vectơ trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

A. Có. **B.** Không.

b. Có hai vectơ trong ba vectơ đó cùng phương.

A. Có. **B.** Không.

Bài 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ:

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = k\overrightarrow{AC'}$.

A. $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 4$.

b. $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k\overrightarrow{BB'}$.

A. $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 4$.

c. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}) = \vec{0}$.

A. $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 4$.

Bài 3: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ:

a. $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = \frac{1}{3}$.

b. $\overrightarrow{MN} = k(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = \frac{1}{3}$.

Bài 4: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = k\overrightarrow{DG}$.

A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $k = \frac{1}{3}$.

Bài 5: Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ:

a. $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

A. $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 4$.

b. $\overrightarrow{PI} = k(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 4$. **D.** $k = \frac{1}{4}$.

Bài 6: Cho hình chóp S.ABCD.

a. Chứng minh rằng nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Điều ngược lại có đúng không ?

b. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

Bài 7: Trong không gian cho ΔABC.

a. Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

b. Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mặt phẳng (ABC).

Bài 8: Cho hình chóp S.ABC. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC', trong đó a, b, c là các số thay

đối. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c để mặt phẳng (A'B'C') đi qua trọng tâm của ΔABC.

A. $a + b + c = 1$. **C.** $a + b + c = 3$.

B. $a + b + c = 2$. **D.** $a + b + c = 4$.

Bài 9: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a. Hãy phân tích (hay biểu thị) vectơ $\overrightarrow{B'C}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

b. Hãy phân tích (hay biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Bài 10: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

A. Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

B. Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

C. Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

D. Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

Bài 11: Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

A. Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP.

B. Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

C. Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

D. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

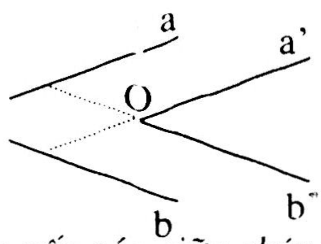
Bài 12: Cho ΔABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba véctơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

§ 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG BẤT KÌ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1: *Góc giữa hai đường thẳng a, b là góc giữa hai đường thẳng a', b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.*



Chú ý: Để xác định (a, b) ta có thể lấy điểm O nằm ngay trên một trong hai đường thẳng đó.

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 2: *Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng* 90^0.

Nhận xét: Cho hai đường thẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng thứ nhất thì vuông góc với đường thẳng thứ hai.

Tức là: $\begin{cases} a \mathbin{/\!/} b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 13: Mỗi khẳng định sau là đúng hay sai ?

a. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 14: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là ĐÚNG ?

A. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

C. Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

D. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

Bài 15: Mệnh đề nào sau đây là ĐÚNG ?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

Bài 16:

a. Cho vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương. Chứng minh rằng nếu vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba véctơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng.

b. Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ thì đồng phẳng. Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Bài 17: Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$.

A. a^2. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Bài 18: Cho hình tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = 60^0$, $\widehat{BAD} = 60^0$, $\widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

b. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

c. $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{IJ}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Bài 19: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a. $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

b. $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

c. $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Bài 20: Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

b. $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

c. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Bài 21: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', C'A.

a. Hãy xác định góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CC'}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

b. Tứ giác MNPQ là hình gì ?

A. Hình thang. **C.** Hình chữ nhật.

B. Hình bình hành. **D.** Hình vuông.

Bài 22: Cho tứ diện ABCD.

a. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = k.$$

A. $k = 0$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 4$.

b. Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Bài 23: Trong không gian cho hai hình vuông ABCD và ABC'D' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'.

a. Hãy xác định góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{OO'}$.

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

b. Tứ giác CDD'C' là hình gì ?

A. Hình thang. **C.** Hình chữ nhật.

B. Hình bình hành. **D.** Hình vuông.

Bài 24: Cho S là diện tích ΔABC. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức: $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - k(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$.

A. $k = 0$. **B.** $k = \frac{1}{4}$. **C.** $k = \frac{1}{2}$. **D.** $k = 2$.

§ 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

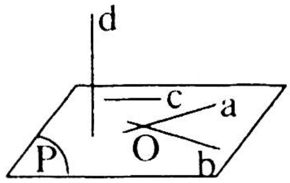
I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí mở đầu: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

Như vậy: $\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ d \perp a \text{ và } d \perp b \end{cases}$

$\Rightarrow \forall c \subset \alpha$ luôn có $d \perp c$.



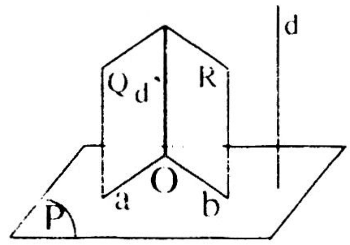
Định nghĩa 1: *Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng khi nó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng đó.*

Định lí 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b nằm trong mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P).

2. CÁC TÍNH CHẤT

Tính chất 1: Qua một điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

Cách dựng:

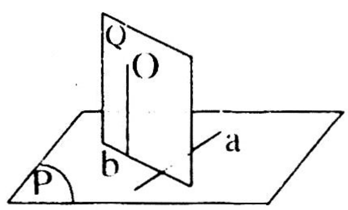


- Qua O dựng đường thẳng d' // d.
- Lấy hai mặt phẳng phân biệt (Q) và (R) cùng đi qua d'. Trong (Q) dựng đường thẳng a qua O và vuông góc với d'. Trong (R) dựng đường thẳng b qua O và vuông góc với d'

Khi đó, mặt phẳng (a, b) chính là mặt phẳng cần dựng.

Tính chất 2: Qua một điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

Cách dựng:



- Lấy đường thẳng a nằm trong (P).
- Dựng mặt phẳng (Q) qua O vuông góc với a cắt (P) theo giao tuyến b.
- Trong (Q) dựng đường thẳng d qua O và vuông góc với b

Khi đó, đường thẳng d chính là đường thẳng cần dựng.

3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Tính chất 3:

a. Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc một mặt phẳng thì song song với nhau.

Tính chất 4:

a. Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tính chất 5:

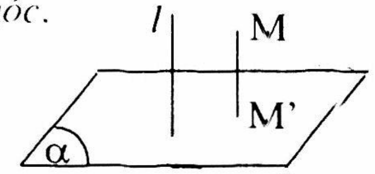
a. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (P) thì cũng vuông góc với a.

b. Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

4. ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

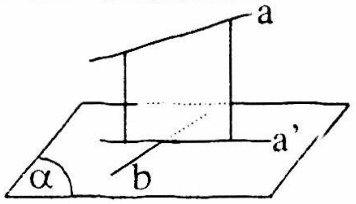
Định nghĩa 2 (Phép chiếu vuông góc): *Phép chiếu song song trong đó phương chiếu vuông góc với mặt chiếu gọi là phép chiếu vuông góc.*

Chú ý: Phép chiếu vuông góc có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.



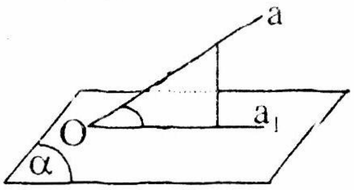
Định lí 2 (*Định lí ba đường vuông góc*): Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi ấy, một đường thẳng b nằm trong mp (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'.

Tức là: $a \perp b \subset (P) \Leftrightarrow a' \perp b$.



5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Định nghĩa 3: *Góc giữa đường thẳng* a *và mặt phẳng* (P) *là góc giữa đường thẳng* a *và hình chiếu* a' *của nó trên* (P), kí hiệu là (a, (P)) hay ((P), a).



Đặc biệt:

- Khi a thuộc (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^0$.
- Khi a vuông góc với (P) thì $(a, (P)) = 90^0$.

Như vậy, ta luôn có $0 \le (a, (P)) \le 90^0$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 25: Khẳng định "Một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (P) thì nó vuông góc với mp(P)" có đúng không ?

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 26: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a. Nếu a // (P) và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Nếu a // (P) và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Nếu a // (P) và a // b thì b // (P).

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b // (\alpha)$.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 27: Cho điểm S có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là H. Với điểm M bất kì trên (P) (M không trùng H), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn hẳng HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a. Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau.

b. Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào dài hơn thì có hình chiếu dài hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu dài hơn thì dài hơn.

Bài 28: Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

Bài 29: Cho hình tứ diện ABCD có AB, BC, CD đôi một vuông góc và AB = a, BC = b, CD = c.

a. Tính độ dài AD.

A. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **C.** $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

B. $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$. **D.** $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

b. Chỉ ra điểm cách đều A, B, C, D.

A. Trung điểm của AB. **C.** Trung điểm của AD.

B. Trung điểm của AC. **D.** Trung điểm của BC.

Bài 30: Cho hình tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc.

a. Chứng minh tam giác ABC có ba góc nhọn.

b. Chứng minh rằng hình chiếu H của điểm O trên mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm ΔABC.

c. Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Bài 31: Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC) và ΔABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các ΔABC và SBC.

a. Ba đường thẳng AH, SK, BC thoả mãn:

A. Đôi một song song. **C.** Đồng quy.

B. Đôi một chéo nhau. **D.** Đáp án khác.

b. Tính số đo của góc (SC, (BHK)).

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

c. Tính số đo của góc (HK, (SBC)).

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 90^0. **D.** 120^0.

Bài 32: Cho hình chóp S.ABC có ABC là tam giác đều cạnh a và SA = SB = SC = b. Gọi G là trọng tâm ΔABC.

a. Chứng minh rằng SG $\perp$ (ABC).

b. Tính SG.

A. $SG = \frac{\sqrt{b^2 - 3a^2}}{3}$. **C.** $SG = \frac{\sqrt{b^2 + 3a^2}}{3}$.

B. $SG = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$. **D.** $SG = \frac{\sqrt{9b^2 + 3a^2}}{3}$.

c. Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $b > a\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{2}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $b < a\sqrt{2}$.

d. Với giả thiết trong c), hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mặt phẳng (P).

A. $S_{\Delta ABC_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$. C. $S_{\Delta ABC_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 + a^2}}{2b}$.

B. $S_{\Delta ABC_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{4b}$. D. $S_{\Delta ABC_1} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 + a^2}}{4b}$.

Bài 33: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Chứng minh rằng $AD \perp BC$. Vậy, các cạnh đối diện của tứ diện đó vuông góc với nhau. Tứ diện như thế gọi là tứ diện trực tâm.

Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương:

a. ABCD là tứ diện trực tâm.
b. Chân đường cao hạ từ một đỉnh trùng với trực tâm của mặt đối diện.
c. $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.
d. Chứng minh rằng bốn đường cao của tứ diện trực tâm đồng quy tại một điểm. Điểm đó gọi là trực tâm của tứ diện nói trên.

Bài 34: Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a. Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).
b. Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

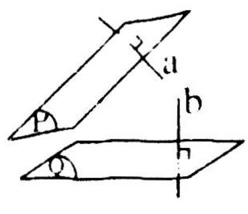
Bài 35: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$. Chứng minh:

a. BD vuông góc với SC.
b. IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

§ 4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG



Định nghĩa 1: *Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

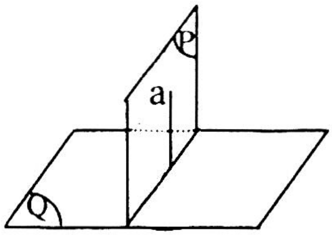
Đặc biệt: Khi (P) và (Q) trùng nhau hoặc song song với nhau thì $(a, b) = 0^0$.

Định lí 1: Nếu S là diện tích của một đa giác $\mathcal{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathcal{H}'$ của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (P') thì $S' = S.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

***Định nghĩa**: **Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau** nếu góc giữa chúng bằng 90^0.*

***Định lí 2** (Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc): Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu một trong hai mặt phẳng đó chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.*



Như vậy: $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \exists a \in (P): a \perp (Q)$.

***Hệ quả 1**:*

a. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trên (P) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

b. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào thuộc mặt phẳng (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) sẽ vuông góc với mặt phẳng (Q).

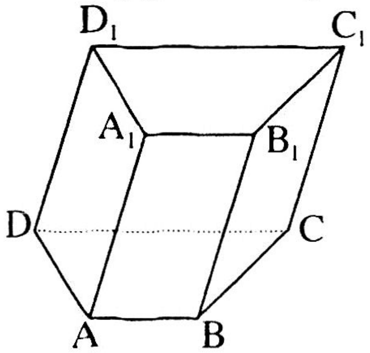
Hệ quả 2: Hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

Hệ quả 3: Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

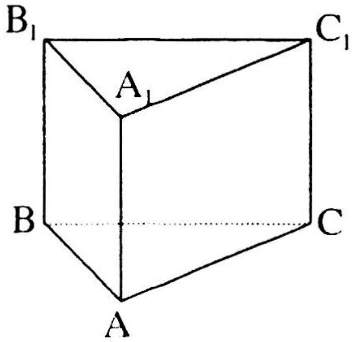
3. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG. HÌNH HỘP CHỮ NHẬT. HÌNH LẬP PHƯƠNG

***Định nghĩa 3**: Một hình lăng trụ được gọi là hình lăng trụ đứng nếu các cạnh bên của nó vuông góc với các mặt đáy.*

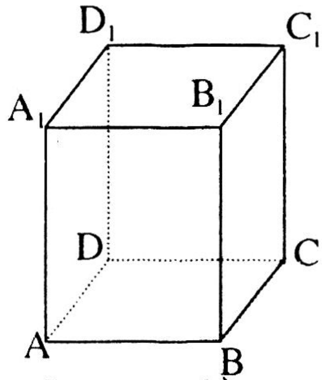
Nhận xét rằng *các mặt bên của hình lăng trụ đứng là những hình chữ nhật và đều vuông góc với đáy.*



Lăng trụ



Lăng trụ đứng



Lăng trụ đều

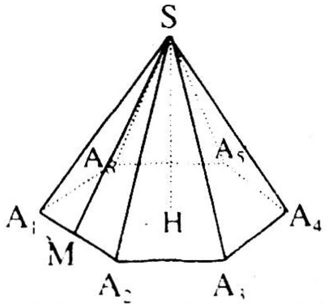
Ta có các trường hợp:

1. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là một miền đa giác đều được gọi là lăng trụ đều*. Như vậy, lăng trụ đều có các mặt bên là những hình chữ nhật bằng nhau.
2. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp đứng*. Như vậy, hình hộp đứng có bốn mặt bên là những hình chữ nhật và hai đáy là hình bình hành.
3. *Một hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật*. Như vậy, hình hộp chữ nhật có sáu mặt đều là những hình chữ nhật.
4. *Hình hộp có tất cả các mặt đều là hình vuông gọi là hình lập phương.*

4. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

***Định nghĩa 4**: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là miền đa giác đều và chân đường cao của hình chóp trùng với tâm của đa giác đều đó.*

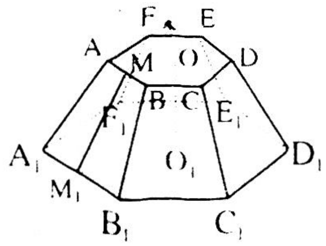
Nhận xét rằng *các cạnh bên của hình chóp đều thì bằng nhau và các mặt bên của nó là những tam giác cân bằng nhau.*



Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp với trung điểm của một cạnh đáy bất kì gọi là *trung đoạn* của hình chóp đều.

***Định nghĩa 5**: Một hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.*

Khi đó:



- Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng.
- Đường nối tâm OO_1 của hai đáy gọi là đường cao của hình chóp cụt đều.
- Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và bằng nhau.
- Đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh đáy thuộc một mặt bên gọi là *trung đoạn* của hình chóp cụt đều.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 36: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 37: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 38: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a. Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

A. Đúng.

B. Sai.

Bài 39: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c. Nếu AC' = BD' = B'D = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không

A. Có.

B. Không.

Bài 40: Trong các mệnh đề sau đây, hãy tìm mệnh đề đúng ?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

C. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Bài 41: Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

Bài 42: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

Bài 43: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC'B') vuông góc với mặt phẳng (ABB'A').

b. Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c.

A. AC' = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

C. AC' = $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

B. AC' = $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$.

D. AC' = $\sqrt{-a^2 + b^2 + c^2}$.

Bài 44: Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** 2a. **D.** $a\sqrt{5}$.

Bài 45: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a. Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng (A'BD) và (B'CD').

b. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Thiết diện là hình gì ?

A. Tam giác đều. **C.** Ngũ giác đều.

B. Hình vuông. **D.** Lục giác đều.

c. Tính diện tích thiết diện đó.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** a^2. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 46: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, SA = x. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau góc 60^0.

A. $x = \frac{a}{2}$. **B.** x = a. **C.** $x = \frac{3a}{2}$. **D.** x = 2a.

Bài 47: Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và AB = AC = BD.

a. Thiết diện của tứ diện ABCD khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD là hình gì ?

A. Tam giác vuông. **C.** Tam giác đều.

B. Tam giác cân. **D.** Hình vuông.

b. Tính diện tích thiết diện khi AC = AB = BD = a.

A. $\frac{a^2\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

Bài 48: Hình hộp ABCD.A'B'C'D' là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau:

a. Tứ diện AB'C'D' có các cạnh đối bằng nhau.

A. Hình hộp thoi. **C.** Hình lập phương.

B. Hình hộp chữ nhật. **D.** Đáp số khác.

b. Tứ diện AB'C'D' có các cạnh đối vuông góc.

A. Hình hộp thoi. **C.** Hình lập phương.

B. Hình hộp chữ nhật. **D.** Đáp số khác.

c. Tứ diện AB'C'D' là tứ diện đều.

A. Hình hộp thoi. **C.** Hình lập phương.

B. Hình hộp chữ nhật. **D.** Đáp số khác.

Bài 49: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho AB = 8cm. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và AC = 6cm, BD = 24cm. Tính độ dài đoạn CD.

A. 30cm. **B.** 26cm. **C.** 22cm. **D.** 20cm.

Bài 50: Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β).

a. Qua điểm M có bao nhiêu mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β).

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

b. Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trong a) sẽ thay đổi như thế nào ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Bài 51: Cho hai ΔACD và ΔBCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và AC=AD=BC=BD= a, CD = 2x. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a. Tính AB theo a và x.

A. $AB = \sqrt{a^2 - x^2}$. **C.** $AB = \sqrt{a^2 + x^2}$.

B. $AB = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$. **D.** $AB = \sqrt{2(a^2 + x^2)}$.

b. Tính IJ theo a và x.

A. $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$. **C.** $IJ = \dfrac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$.

B. $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}$. **D.** $IJ = \dfrac{\sqrt{2(a^2 + x^2)}}{2}$.

c. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc ?

A. $\dfrac{a}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 52: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi có cạnh *a* và có SA = SB = SC = *a*. Chứng minh rằng:

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (SBD).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

b. Xác định dạng của ΔSBD.

A. Tam giác vuông. **C.** Tam giác vuông cân.

B. Tam giác cân. **D.** Tam giác đều.

Bài 53: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a. Tính độ dài đoạn thẳng SO.

A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

b. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (SAC).

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

c. Tính độ dài đoạn OM.

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

d. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

Bài 54: Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc $\widehat{A} = 60^0$, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SAC).

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

b. Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK.

A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a}{3}$.

c. Tính số đo của góc $\widehat{BKD}$.

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

Bài 55: Cho ΔABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mp(P) và mp(ABC) là φ, hình chiếu của ΔABC trên mặt phẳng (P) là $\Delta A'B'C'$. Tìm hệ thức liên hệ giữa diện tích ΔABC và diện tích $\Delta A'B'C'$.

A. $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\sin\varphi$. C. $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\tan\varphi$.

B. $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$. D. $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cot\varphi$.

§ 5. KHOẢNG CÁCH

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG, ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

***Định nghĩa 1**: Khoảng cách từ điểm* M *đến mặt phẳng* (P) *(đến đường thẳng* d) *là khoảng cách giữa hai điểm* M *và* H, *trong đó* H *là hình chiếu vuông góc của điểm* M *trên mặt phẳng* (P) *(trên đường thẳng* d).

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

***Định nghĩa 2**: Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng* (P) *song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng* (P).

***Định nghĩa 3**: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định lí: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn có duy nhất một đường thẳng d cắt cả a và b, và vuông góc với mỗi đường thẳng ấy. Đường thẳng d được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

***Định nghĩa 4**: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.*

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VÀ TỰ LUẬN

Bài 56: Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a. Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b.

A. Đúng. **B.** Sai.

b. Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a, b chéo nhau. Khi đó, đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P).

A. Đúng. **B.** Sai.

c. Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ).

A. Đúng. **B.** Sai.

d. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

A. Đúng. **B.** Sai.

e. Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

A. Đúng. **B.** Sai.

Bài 57: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.

b. Tính khoảng cách từ C đến AC'.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Bài 58: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

A. a. **B.** 2a. **C.** 3a. **D.** 4.

Bài 59: Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 60: Cho tứ diện ABCD có AC = BC = AD = BD = a, AB = c, CD = c'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

A. $\frac{\sqrt{a^2 - c^2 - c'^2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3a^2 - c^2 - c'^2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{2a^2 - c^2 - c'^2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{4a^2 - c^2 - c'^2}}{2}$.

Bài 61: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

A. $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. B. $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. C. $\dfrac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. D. $\dfrac{4ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. B. $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. C. $\dfrac{3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. D. $\dfrac{4ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Bài 62: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng (A'B'C') thuộc đường thẳng B'C'.

a. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

A. $\dfrac{a}{3}$. B. $\dfrac{a}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

A. $\dfrac{a}{3}$. B. $\dfrac{a}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 63: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{a}{2}$.

Bài 64: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và B'C.

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 65: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = a, AC = 2a.

a. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. B. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

b. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và CD'.

A. $\dfrac{a}{3}$. B. $\dfrac{a}{2}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 66: Cho hình hộp thoi ABCD.A'B'C'D' có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy (ABCD) và (A'B'C'D').

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 67: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy (ABCD).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 68: Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SOF) và (SBC).

A. 30^0. B. 45^0. C. 60^0. D. 90^0.

b. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{3a}{8}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a}{3}$.

c. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{2a}{3}$.

BÀI TẬP LÀM THÊM

Bài 69: Cho hình tứ diện ABCD có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

B. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Bài 70: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai ?

A. Nếu b // (P) thì $b \perp a$.

B. Nếu $b \perp (P)$ thì b // a.

C. Nếu b // a thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì b // (P).

Bài 71: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Bài 72: Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Ba mệnh đề trên đều sai.

Bài 73: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Bài 74: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

B. Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

C. Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

D. Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.

Bài 75: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Bài 76: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân.

B. S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân với đỉnh S.

C. S.ABC là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng chứa đáy bằng nhau.

D. S.ABC là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.

Bài 77: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

B. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều sai.

Bài 78: Hình tứ diện ABCD có AB, AC, AD đôi một vuông góc và AB = AC = AD = 3. Diện tích ΔBCD bằng:

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{9\sqrt{2}}{3}$. **C.** 27. **D.** $\frac{27}{2}$.

Bài 79: Hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = AA' = AD = a và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^0$. Khi đó, khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện A'ABD bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Bài 80: Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOD} = \widehat{AOC} = 60^0$, $\widehat{BOC} = 90^0$.

a. Chứng tỏ rằng ΔABC là tam giác vuông và OA $\perp$ BC.

b. Tìm đường vuông góc chung IJ của OA và BC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

c. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

Bài 81: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = a, $\widehat{ASB} = 120^0$, $\widehat{BSC} = 60^0$, $\widehat{CSA} = 90^0$.

a. Chứng tỏ rằng ΔABC là tam giác vuông.

b. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC).

Bài 82: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD). Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt CM = x, CN = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:

a. Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0.

b. Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau.

Bài 83: Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong mặt phẳng (P), cạnh AB và AC lần lượt tạo với mặt phẳng (P) các góc β và γ. Gọi α là góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Bài 84: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và OA = a, OB = b, OC = c. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Tính diện tích tam giác HAB, HBC, HCA.

Bài 85: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C, CA = a, CB = b; mặt bên ABB'A' là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB'.

a. Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P). Thiết diện là hình gì ?
b. Tính diện tích thiết diện nói trên.

Bài 86: Một tứ diện được gọi là gần đều nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện ABCD, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương:

a. Tứ diện ABCD là gần đều.
b. Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau.
c. Các trọng tuyến (đoạn nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện) bằng nhau.
d. Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng 180^0.

Bài 87: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và BD; P là một điểm thay đổi trên đoạn thẳng AD.

a. Xác định giao điểm Q của mặt phẳng (MNP) và cạnh AC. Tứ giác MNPQ là hình gì ?
b. Tìm quỹ tích giao điểm I của QM và PN.
c. Tìm quỹ tích giao điểm J của QN và PM.

Bài 88: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Điểm M nằm giữa A và D, điểm N nằm giữa C và C' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$.

a. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mp(ACB').
b. Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua MN và song song với mp(ACB').

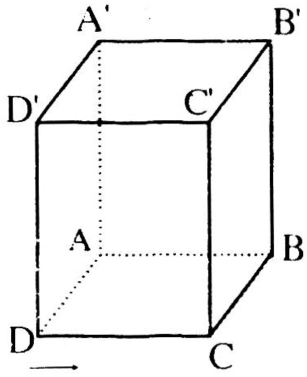
Bài 89: Cho hình chóp S.ABC. Gọi K và N lần lượt là trung điểm của SA và BC, M là điểm nằm giữa S và C.

a. Chứng minh rằng mặt phẳng đi qua K, song song với AB và SC thì đi qua điểm N.
b. Xác định thiết diện của hình chóp S.ABC khi cắt bởi mặt phẳng (KMN). Chứng tỏ rằng KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 90: (Tr 126): Hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a. Tính khoảng cách từ S đến mp(ABCD).
b. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mp(SCD).
c. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.
d. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P). Tính diện tích thiết diện.
e. Tính góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

ĐÁP SỐ TRẮC NGHIỆM – LỜI GIẢI TỰ LUẬN



Bài 1: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

Bài 2: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). B.

a. Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'}.$$

Vậy, với k = 1 thoả mãn hệ thức.

b. Ta có:

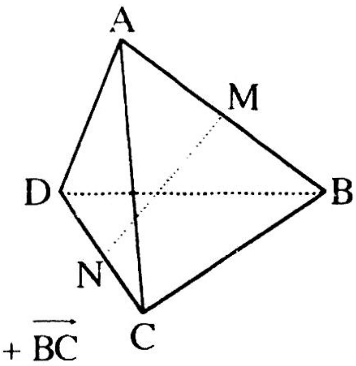
$$VT = \overrightarrow{BD} - (\overrightarrow{B'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{B'D} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{BB'}.$$

Vậy, với k = 1 thoả mãn hệ thức.

c. Thay thế bởi các vectơ bằng nhau, ta được:

$$VT = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'A} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Vậy, với k = 1 thoả mãn hệ thức.



Bài 3: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

a. Ta lần lượt có hai cách biểu diễn:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}. \quad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. Vậy, với $k = \frac{1}{2}$ thoả mãn hệ thức.

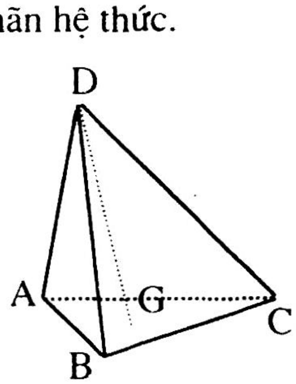
b. Ta lần lượt có hai cách biểu diễn: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$. (3)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}. \quad (4)$$

Cộng theo vế (3) và (4), ta được:

$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. Vậy, với $k = \frac{1}{2}$ thoả mãn hệ thức.



Bài 4: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA}. \quad (1)$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB}. \quad (2)$$

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{DG}.$$

Vậy, với k = 3 thoả mãn hệ thức.

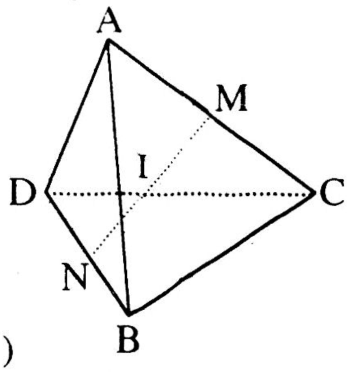
Bài 5: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). D.

a. Ta lần lượt có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$. (1)

$\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IM}$. (2)

Cộng theo vế (1) và (2), ta được: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) = \vec{0}$.

Vậy, với k = 1 thoả mãn hệ thức.



b. Ta lần lượt có: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA}$. (3)

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}$. (4)

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IC}$. (5)

$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{ID}$. (6)

Cộng theo vế (3), (4), (5) và (6), ta được:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$. Vậy, với $k = \frac{1}{4}$ thoả mãn hệ thức.

Bài 6:

a. Nếu ABCD là hình bình hành với tâm O thì:

$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$, $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$, từ đó, suy ra: $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$.

Điều ngược lại cũng đúng, thật vậy:

$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{3D} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

b. Trước tiên, vì O là giao điểm của AC và BD nên:

- O, A, C thẳng hàng, suy ra $\exists m$: $\overrightarrow{OA} = m\overrightarrow{OC}$.
- O, B, D thẳng hàng, suy ra $\exists n$: $\overrightarrow{OB} = n\overrightarrow{OD}$.

Khi đó: $4\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$

$= (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})$

$= 4\overrightarrow{SO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$

$$\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{OC} + (n+1)\overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1=0 \\ n+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ O là trung điểm của AC và BD $\Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành.

Bài 7:

a. Với điểm M thuộc mặt phẳng (ABC) thì ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng, suy ra $\exists$ y, z sao cho:

$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + z(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

Đặt x = 1 − y − z (tức là x + y + z = 1) thì ta được:

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

b. Ngược lại, ta biến đổi:

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = (1-y-z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + z(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng

$\Rightarrow M \in (ABC)$.

Bài 8: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Gọi G là trọng tâm ΔABC, ta có:

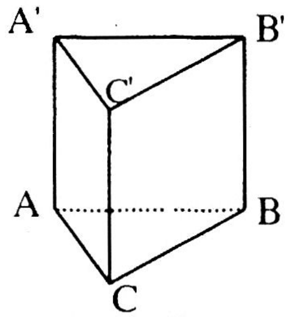
$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}.$$

Sử dụng kết quả từ bài tập 5, ta thấy để G thuộc mặt phẳng (A'B'C') thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho:

$$x\overrightarrow{SA} + y\overrightarrow{SB} + z\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SG} = \frac{a}{3}.\overrightarrow{SA'} + \frac{b}{3}.\overrightarrow{SB'} + \frac{c}{3}.\overrightarrow{SC'}$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{a}{3}).\overrightarrow{SA'} + (y - \frac{b}{3}).\overrightarrow{SB'} + (z - \frac{c}{3}).\overrightarrow{SC'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3x \\ b = 3y \\ c = 3z \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 3x + 3y + 3z = 3(x + y + z) = 1, \text{đpcm.}$$



Bài 9: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). B.

a. Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

$$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$$
$$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'} = \vec{c} - \vec{b} - \vec{a}.$$

b. Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}.$$

Bài 10: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

a. Với (A) thì từ: $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$, do đó (A) là sai.

b. Với (B) thì từ: $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$
Do đó (B) là sai.

c. Với (C) thì từ: $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow$ bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng. Do đó (C) là đúng.

d. Với (D) thì từ: $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow$ A nằm giữa BC

$\Rightarrow$ B không thể là trung điểm của đoạn AC. Do đó (D) là sai.

Bài 11: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

a. Với (A) thì N đúng là trung điểm của đoạn MP, do đó (A) đúng.

b. Với (B) đúng vì đó chính là quy tắc trung điểm.

c. Với (C) đúng vì thoả mãn định lí về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian.

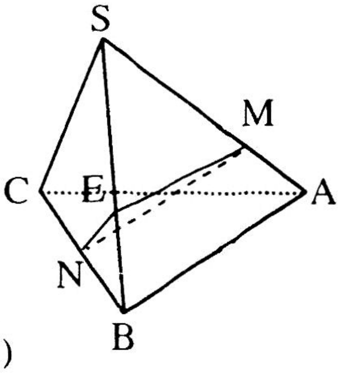
d. Với (D) thì bằng quy tắc ba điểm ta nhận thấy đẳng thức:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$$

đúng với mọi điểm A, B, C, D nên cũng đúng với tứ diện ABCD.

Do đó (D) là sai.

Bài 12: Ta có thể trình bày theo hai cách sau:



Cách 1: Ta lần lượt có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BN}. \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}. \qquad (2)$$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

$$3\overrightarrow{MN}=\underbrace{(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MS})}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SC}+\underbrace{(2\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN})}_{\vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC} \text{ đồng phẳng.}$$

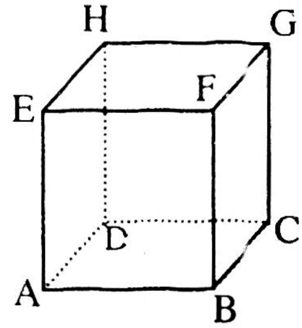
Cách 2: Lấy điểm E trên SB sao cho SE = 2EB, ta có:

$$\frac{SM}{MA}=\frac{SE}{EB}=2 \Rightarrow AB \,//\, EM \subset (MNE),$$

$$\frac{CN}{NB}=\frac{SE}{EB}=2 \Rightarrow SC \,//\, EN \subset (MNE),$$

Vậy, ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng vì chúng cùng có giá song song với mặt phẳng (EMN).

Bài 13: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.



a. Sai, vì chúng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau, cụ thể với hình lập phương ABCD.EFGH ta thấy:

- AE và AD cắt nhau nhưng cùng vuông góc với AB.
- AE và BC chéo nhau nhưng cùng vuông góc với AB.

b. Sai, vì có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc chéo nhau, cụ thể với hình lập phương ABCD.EFGH ta thấy:

- AE và AH cắt nhau nhưng cùng vuông góc với AB.
- AE và BF song song với nhau nhưng cùng vuông góc với AB.
- AE và BG chéo nhau nhưng cùng vuông góc với AB.

Bài 14: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 15: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 16:

a. Giả sử trái lại, ba véctơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đồng phẳng. Tức là tồn tại hai số x và y sao cho: $\vec{n}=x\vec{a}+y\vec{b} \Rightarrow \vec{n}.\vec{n}=x\vec{a}.\vec{n}+y\vec{b}.\vec{n} \Rightarrow \vec{n}^2=0 \Rightarrow |\vec{n}|=0$ điều đó mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy, ba véctơ $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng.

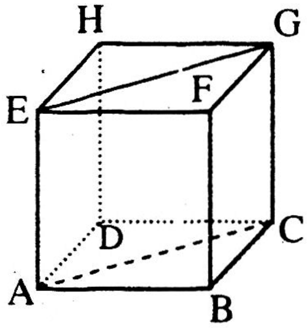
b. Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}$..

Khi đó, nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương thì $\vec{n}$, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng, tức là tồn tại ba số x, y, z sao cho:

$$\vec{c} = x\vec{n} + y\vec{a} + z\vec{b} \Rightarrow \vec{c}.\vec{n} = x\vec{n}.\vec{n} + y\vec{a}.\vec{n} + z\vec{b}.\vec{n} \Rightarrow 0 = x\vec{n}^2 \Rightarrow x = 0.$$

Tức là, ta có biểu diễn: $\vec{c} = y\vec{a} + z\vec{b} \Rightarrow$ ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.



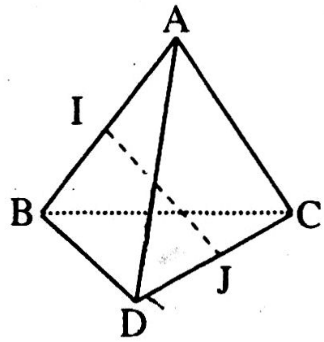
Bài 17: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^0,$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{EG}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG})$$

$$= a.a\sqrt{2}.\cos45^0 = a^2,$$ do đó (A) là đúng.



Bài 18: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C; c). C.

a. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$= AB^2.\cos60^0 - AB^2.\cos60^0 = 0$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^0.$$

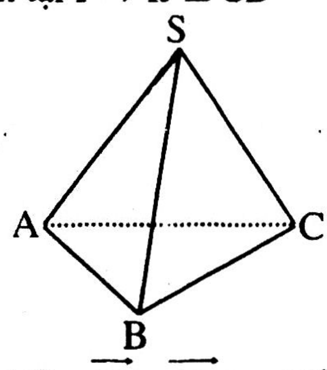
b. Từ giả thiết, suy ra ΔABC, ΔABD đều.

Ta có: $\Delta ACD = \Delta BCD$ (c.c.c) $\Rightarrow JA = JB \Rightarrow \Delta JAB$ cân tại J $\Rightarrow IJ \perp AB$.

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IJ}) = 90^0.$$

c. Ta có: $\Delta ABD = \Delta ABC$ (c.c.c) $\Rightarrow ID = IC \Rightarrow \Delta ICD$ cân tại I $\Rightarrow IJ \perp CD$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{CD}) = 90^0.$$



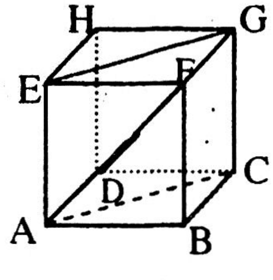
Bài 19: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C; c). C.

a. Ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$$= SA^2.\cos\widehat{CSA} - SA^2.\cos\widehat{ASB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}) = 90^0.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được: $(\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{AC}) = 90^0$, $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 90^0$.



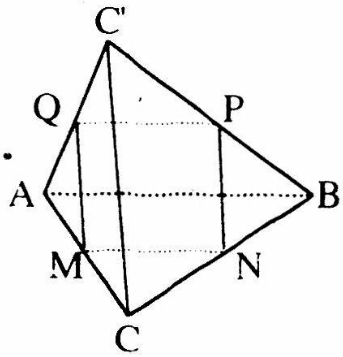
Bài 20: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). C.

a. Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAD} = 45^0$, bởi ΔABC vuông cân tại B.

b. Ta có: $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{FAC} = 60^0$, bởi ΔAFC là tam giác đều.

c. Ta có: $(\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{BAE} = 90^0$, bởi AFE là hình vuông.

Bài 21: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C.



a. Gọi a là cạnh của tam giác đều, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$$

$$= a^2.\cos 60^0 - a^2.\cos 60^0 = 0$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}) = 90^0.$$

b. Nhận xét rằng:

$$MN \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \text{ và } PQ \overset{//}{=} \frac{1}{2}AB \Rightarrow MN \overset{//}{=} PQ. \quad (1)$$

$$\widehat{QMN} = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CC'}) = 90^0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 22:

a. *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta lần lượt có:

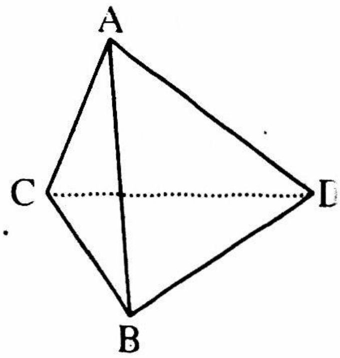
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}, \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

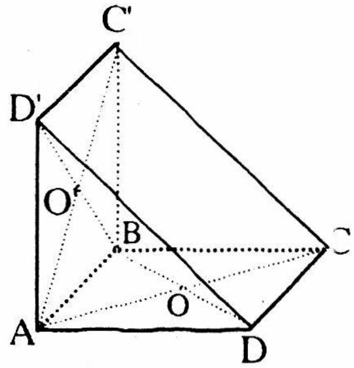
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0, \text{ đpcm.}$$



b. $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \text{ và } \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

Bài 23: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C.



a. Giả sử hình vuông có cạnh bằng a, ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$$

$$= a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos 45^0 - a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\cos 45^0 = 0$$

$$\Leftrightarrow AB \perp OO', \text{ đpcm.}$$

b. Nhận xét rằng:

$$CD \overset{//}{=} AB \text{ và } C'D' \overset{//}{=} AB \Rightarrow CD \overset{//}{=} C'D'. \quad (1)$$

$$\widehat{DCC'} = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CC'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OO'}) = 90^0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra CDD'C' là hình chữ nhật.

Bài 24: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Với ΔABC, ta có:

$$S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\sin\widehat{A}. \quad (1)$$

Mặt khác, ta có: $\sin\widehat{A} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{A}} = \sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}\right)^2}$

$$= \frac{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\frac{\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$$

Vậy, với $k = \frac{1}{2}$ thoả mãn hệ thức.

Bài 25: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Khẳng định trên là sai vì cần thêm điều kiện hai đường thẳng đó phải cắt nhau.

Bài 26: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B; c). B; d). B.

a. Đúng, bởi: $a // (P) \Rightarrow \exists a' \subset (P)$ sao cho $a // a'$, $b \perp (P) \Rightarrow b \perp a'$.

Khi đó: $g(a, b) = g(a', b) = 90^0 \Rightarrow a \perp b$.

b. Sai, bởi khi đó b có thể nằm trong (P).

c. Sai, bởi khi đó b có thể vuông góc với a.

d. Sai, bởi khi đó b có thể nằm trong (α).

Bài 27: *Hướng dẫn*: Sử dụng tính chất bằng nhau của tam giác vuông.

Bài 28: Gọi d là đường thẳng đi qua tâm I đường tròn ngoại tiếp ΔABC và vuông góc với (ABC). Mặt phẳng trung trực của đoạn AD cắt d tại O thì O cách đều bốn đỉnh của tứ diện, thật vậy trước tiên ta có ngay:

$$OA = OD. \quad (1)$$

Mặt khác: $\Delta OIA = \Delta OIB = \Delta OIC$ (c.g.c) $\Rightarrow OA = OB = OC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $OA = OB = OC = OD$ tức là, điểm O cách đều bốn đỉnh của tứ diện.

Bài 29: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). C.

a. Ta có: $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow CD \perp (ABC) \Rightarrow CD \perp AC \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C

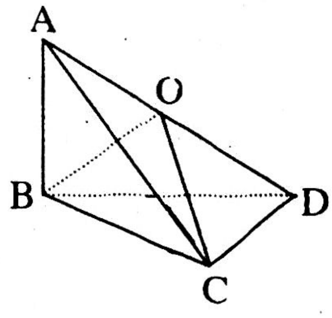
$$\Rightarrow AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

b. Gọi O là trung điểm của AD.

- Vì ΔACD vuông tại C nên: $OA = OC = OD$. (1)

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AB \\ BC \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow AB \perp (BCD)$



$\Rightarrow AB \perp BD \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B

$\Rightarrow OA = OB = OD.$ (2)

Vậy, điểm O cách đều A, B, C, D.

Bài 30:

a. Giả sử $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$.

Xét ΔABC vuông tại O, ta có:

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$, $BC^2 = OB^2 + OC^2 = b^2 + c^2$,

$AC^2 = OA^2 + OC^2 = a^2 + c^2$,

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{a^2 + b^2 + a^2 + c^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{a^2 + c^2}} > 0$$

$\Rightarrow$ góc $\widehat{BAC}$ nhọn.

Chứng minh tương tự, ta được các góc ABC, ACB đều nhọn.

Vậy, các góc của tam giác ABC đều nhọn.

b. Từ giả thiết: $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC.$ (1)

Ta có: $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Leftrightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$ (2)

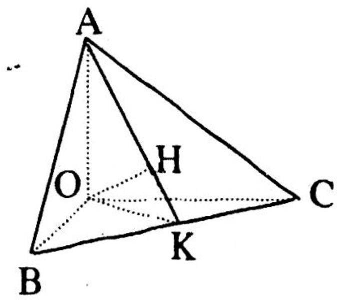
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAH)$.

Chứng minh tương tự ta nhận được $CA \perp (OBH)$.

Ta có: $BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH.$ (3)

$AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra H là trực tâm của ΔABC.



c. Giả sử AH cắt BC tại K, suy ra $OK \perp BC$.

- Trong ΔOBC vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

- Trong ΔOAK vuông tại O, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2},$$ đpcm.

Bài 31: *Đáp số trắc nghiệm* a). C; b). C; c). C.

a. Gọi $\{E\} = AH \cap BC$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE$

$\Rightarrow$ SE là đường cao của $\Delta SBC \Rightarrow K \in SE$.

Vậy, ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy tại E.

b. Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC.$ (1)

Mặt khác, ta có: $BK \perp SC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $SC \perp (BHK).$ (*)

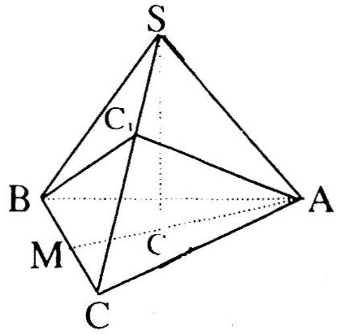
c. Từ (*), suy ra $SC \perp HK$. (3)

Mặt khác, từ a), suy ra $BC \perp HK$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra $HK \perp (SBC)$.

Bài 32:

a. Gọi M là trung điểm BC, ta có:



$$\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SG.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được:

$AB \perp SG \Rightarrow SG \perp (ABC)$.

b. *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Trong ΔGSA vuông tại G, ta có:

$$SG^2 = SA^2 - GA^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow SG = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$

c. *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Để điểm C_1 nằm giữa S và C điều kiện là ΔSAC (cân tại S) nhọn

$$\Leftrightarrow \widehat{ASC} < 90^0 \Leftrightarrow \cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow \frac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA.SC} > 0$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > 2b^2 \Leftrightarrow a > b\sqrt{2}.$$

d. *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Ta có: $\Delta SAC = \Delta SBC$ (c.c.c) $\Rightarrow SC \perp B_1C \Rightarrow SC \perp (ABC_1)$

$\Rightarrow \Delta\ ABC_1$ cân tại C_1 chính là thiết diện.

Ta có: $$AC_1 = SA.\sin\widehat{ASC} = SA\sqrt{1-\cos^2\widehat{ASC}} = b\sqrt{1-\left(\frac{2b^2-a^2}{2b^2}\right)^2}$$

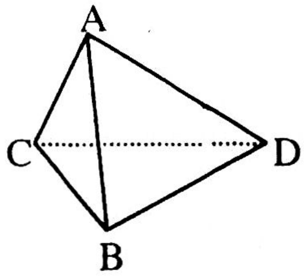
$$= \frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2b} \Rightarrow S_{\Delta ABC_1} = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}.$$

Bài 33: Ta lần lượt có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}, \quad (2)$$



$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}. \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3), ta được:

$$0 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow AD \perp BC.$$

a. Chứng minh (a) và (b) tương đương.

Với giả thiết (a), gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD), ta có: $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AD) \Rightarrow BC \perp A'D.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $BD \perp A'C$.

Từ đó, suy ra A' là trực tâm ΔBCD.

Với giả thiết (b), gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (BCD), ta có: $\begin{cases} BC \perp DA' \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AD) \Rightarrow BC \perp AD.$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AB \perp CD$, $AC \perp BD$.

b. Chứng minh (a) và (c) tương đương.

Với giả thiết (a), ta có:

$$0 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 + AD^2$$

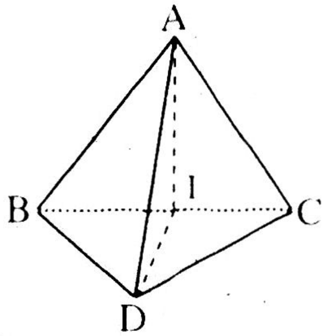
$$\Leftrightarrow BD^2 + AC^2 = BC^2 + AD^2.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng nhận được $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$.

Vì các phép biến đổi trên là tương đương nên điều ngược lại vẫn đúng.

c. Chứng minh (a) và (d) tương đương – *Bạn đọc tự giải.*

Bài 34:



a. Vì ΔABC và ΔBCD cân theo thứ tự tại A và D nên:

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADI), \text{ đpcm.}$$

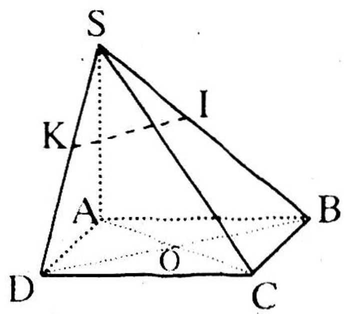
b. Với AH là đường cao của ΔADI, suy ra:

$AH \perp DI$. (1)

Mặt khác từ a), ta có: $BC \perp (ADI) \Rightarrow BC \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AH \perp (BCD)$.

Bài 35:



a. Từ giả thiết, suy ra: $BD \perp AC$. (1)

$BD \perp SA$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra:

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$, đpcm.

b. Từ giả thiết, suy ra: $IK // BD \Rightarrow IK \perp (SAC)$.

Bài 36: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B.

a. Sai, bởi chúng có thể cắt nhau.

b. Sai, bởi chúng có thể song song với nhau.

Bài 37: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). A.

a. Sai, nếu a $\perp$ (P) thì mọi mặt phẳng chứa a đều vuông góc với (P).

b. Đúng, bởi với hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β), ta luôn có:

- Qua M kẻ được duy nhất đường thẳng a vuông góc với (α).
- Qua M kẻ được duy nhất đường thẳng b vuông góc với (β).

Từ đó, suy ra qua M có một và chỉ một mặt phẳng (P) = (a, b) vuông góc với (α) và (β).

c. Đúng, bởi đó chính là đường thẳng đi qua điểm cho trước đó và vuông góc với mặt phẳng.

Bài 38: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A.

Bài 39: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Khi đó ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật, bởi trong bài tập 38 của chương II ta có:

$$A'C^2 + BD'^2 + B'D^2 + AC'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2) + AC'^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$

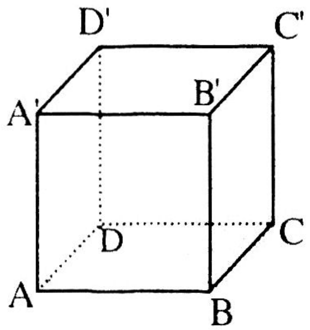
$$\Rightarrow AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Khi đó, hình hộp ABCD.A'B'C'D' có bốn đường chéo bằng nhau nên nó là hình hộp chữ nhật.

Bài 40: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 41: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 42: *Đáp số trắc nghiệm* D.



Bài 43:

a. Ta có: $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'C'D)$

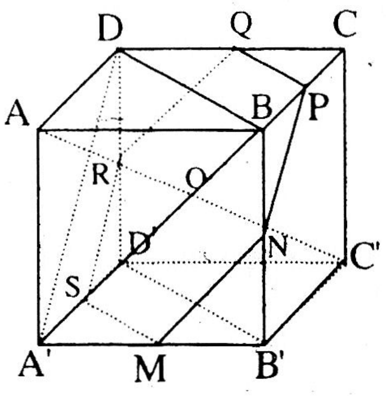
$\Rightarrow (AB'C'D) \perp (ABB'A')$.

b. *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có: $C'A^2 = C'C^2 + AC^2 = C'C^2 + AB^2 + BC^2 = c^2 + a^2 + b^2$

$\Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Bài 44: *Đáp số trắc nghiệm* B.



Bài 45:

a. Ta có: $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp AD \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (AB'C'D)$

$\Rightarrow A'B \perp AC'$. (1)

$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C)$

$\Rightarrow BD \perp AC'$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $AC' \perp (B'CD')$.

b. *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, B'C' và DD', suy ra:

(MNP) song song với các mặt phẳng (AB'D') và (BDC').

Ta nhận xét: $\begin{cases} (AB'D')//(MNP) \\ (AB'D') \cap (A'B'C'D') = B'D' \\ (MNP) \cap (A'B'C'D') = Nx \end{cases}$

Suy ra Nx song song với B'D' và cắt C'D' tại F là trung điểm của C'D'.

$$\begin{cases} (C'BD)//(MNP) \\ (C'BD) \cap (ABCD) = BD \\ (MNP) \cap (ABCD) = My \end{cases}$$

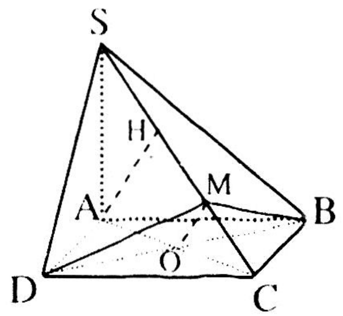
Suy ra My song song với BD và cắt AD tại Q là trung điểm của AD.

Kéo dài FN cắt A'B' tại G, nối GM cắt BB' tại E.

Vậy, thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP) là lục giác [illegible]FPQ và cũng chính là mặt phẳng trung trực của AC'.

c. *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Dựa theo tính chất đường trung bình ta thấy ngay MENFPQ là lục giác đều có độ dài cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Khi đó: $S_{MENFPQ} = 6.\dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Bài 46: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Lời giải tự luận: Trong ΔSBC, hạ $BM \perp SC$, ta có:

$\Delta SAB = \Delta SAD$ (c.g.c) $\Rightarrow SB = SD$

$\Rightarrow \Delta SBC = \Delta SDC$ (c.c.c) $\Rightarrow BM = DM$ và $SC \perp DM$

Suy ra $\widehat{BMD}$ là một trong bốn góc mà hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo ra.

Khi đó, gọi O là tâm của hình vuông ABCD thì để:

$((SBC), (SCD)) = 60^0 \Rightarrow \widehat{BMD} = 120^0 \Rightarrow \widehat{BMO} = 60^0$

$\Leftrightarrow \tan\widehat{BMO} = \tan 60^0 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OM} = \sqrt{3}$. (1)

Ta có ngay: $OB = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. (2)

Trong ΔSAC hạ AH vuông góc với SC, ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

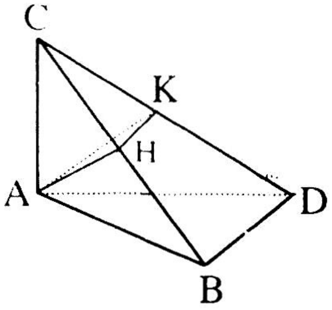
$\Rightarrow AH = \dfrac{ax\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$, Trong ΔAHC có OM là đường trung bình, suy ra:

$OM = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{ax\sqrt{2}}{2\sqrt{2a^2 + x^2}}$. (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $\dfrac{\sqrt{2a^2 + x^2}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow 2a^2 + x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = a.$

Vậy, với x = a thoả mãn điều kiện đầu bài.

Bài 47: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.



a. Để xác định thiết diện, ta thực hiện:

- Trong (ACD) kẻ $AK \perp CD$.
- Trong (BCD) kẻ $HK \perp CD$.

Suy ra, thiết diện là ΔAHK.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AB \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH \Rightarrow AH \perp (BCD)$

$\Rightarrow AH \perp HK \Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại H

b. Ta có: $S_{\Delta AHK} = \dfrac{1}{2} AH.HK.$ (1)

Ta có: $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$ (2)

Vì hai tam giác CKH và CBD đồng dạng nên:

$\dfrac{HK}{DB} = \dfrac{CK}{CB} \Rightarrow HK = \dfrac{DB.CK}{CB} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$ (3)

Thay (2), (3) vào (1), ta được: $S_{\Delta AHK} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}.$

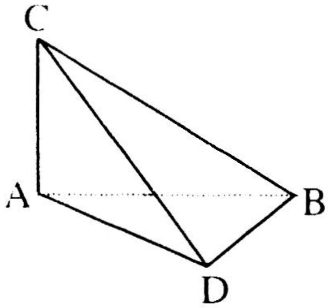
Bài 48: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). C.

a. Tứ diện AB'C'D' có các cạnh đối bằng nhau thì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp chữ nhật, bởi khi đó ta có $AA' \perp (ABCD)$.

b. Tứ diện AB'C'D' có các cạnh đối vuông góc thì ABCD.A'B'C'D' là hình hộp thoi, bởi khi đó ta có BCC'B' là hình thoi (có hai đường chéo vuông góc với nhau).

c. Tứ diện AB'C'D' là tứ diện đều thì ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương, bởi khi đó ta có BCC'B' là hình vuông.

Bài 49: *Đáp số trắc nghiệm* B.



Lời giải tự luận: Ta có:

$BD \perp AB \Rightarrow BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp BC.$

Trong ΔBCD vuông tại B, ta có:

$CD^2 = BD^2 + BC^2 = BD^2 + AB^2 + AC^2$

$= 24^2 + 8^2 + 6^2 = 676 \Rightarrow CD = 26cm.$

Bài 50: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). D.

a. Ta luôn có:

- Qua M kẻ được duy nhất đường thẳng a vuông góc với (α).
- Qua M kẻ được duy nhất đường thẳng b vuông góc với (β).

Từ đó, suy ra qua M có một và chỉ một mặt phẳng (P) = (a, b) vuông góc với (α) và (β).

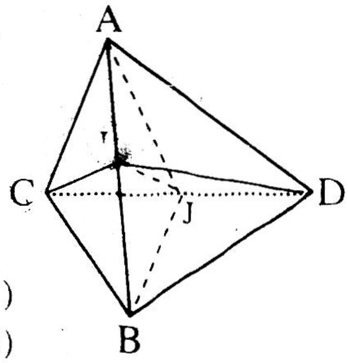
b. Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trên sẽ là vô số mặt phẳng.

Bài 51: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). B; c). D.

a. Ta có ngay: $AJ^2 = AC^2 - CJ^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow AJ = BJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Trong ΔJAB vuông cân tại J, ta có:

$$AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}.$$



b. Trong ΔJAB vuông cân tại J, ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2(a^2 - x^2)}}{2}.$$

c. Ta có: - ΔABC cân tại C nên $AB \perp IC$. (1)

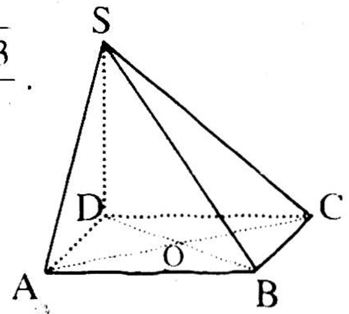
- ΔABD cân tại D nên $AB \perp ID$. (2)

Suy ra $\widehat{CID}$ là một trong bốn góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Từ đó, để: $(ABC) \perp (ABD) \Rightarrow \widehat{CID} = 90^0 \Rightarrow IC^2 + ID^2 = CD^2$

$$\Leftrightarrow 2IC^2 = CD^2 \Leftrightarrow 2(AC^2 - IA^2) = CD^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(a^2 - \frac{a^2 - x^2}{2}\right) = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Bài 52: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A.

a. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, ta có: $BD \perp AC$. (1)

Vì ΔSAC cân tại S nên: $SO \perp AC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AC \perp (SBD) \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$.

b. Từ giả thiết, ta có:

$$\Delta SAC = \Delta BAC = \Delta DAC \Rightarrow SO = OB = OD \Rightarrow SO = \frac{1}{2}BD.$$

Trong ΔSBD trung tuyến SO thoả mãn $SO = \frac{1}{2}BD$ nên nó là tam giác vuông tại S.

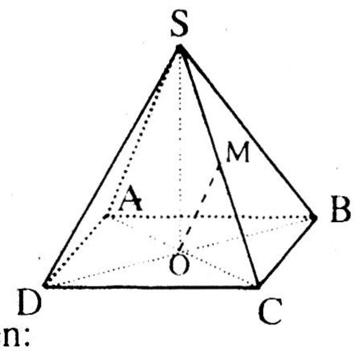
Bài 53: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). D; c). A; d). B.

a. Trong ΔOSA vuông tại O, ta có:

$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b. Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (MBD) \perp (SAC)$.

c. Trong ΔOSC vuông tại O, ta có: $OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2}$.



d. Nhận xét rằng: $OM \perp BD$, vì ΔMBD cân tại M,

$OC \perp BD$, vì ABCD là hình vuông,

$(MBD) \cap (ABCD) = BD$,

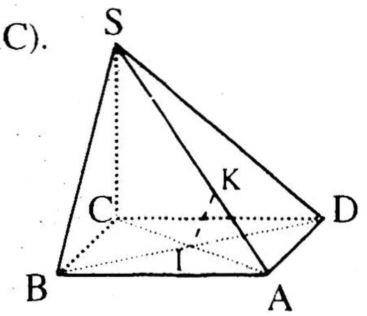
Từ đó, suy ra: $((MBD), (ABCD)) = \widehat{MOC}$.

Từ kết quả trong a), suy ra ΔOSA vuông cân tại O nên:

OM là phân giác $\Rightarrow \widehat{MOC} = 45^0$.

Bài 54: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A; c). D.

a. Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.



b. Trong ΔABD có $\widehat{A} = 60^0$ nên nó là tam giác đều,

Do đó: $BD = a$, $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

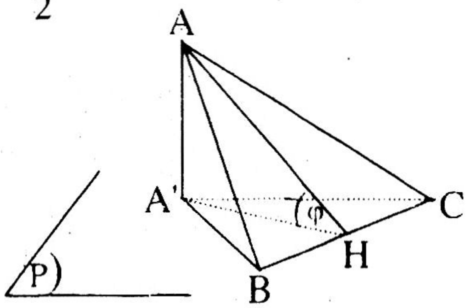
Trong ΔSAC vuông tại C, ta có:

$$SA^2 = SC^2 + AC^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = \frac{9a^2}{2} \Rightarrow SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

Vì hai tam giác AKI và ACS đồng dạng, nên: $\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{SA} \Rightarrow IK = \frac{SC.AI}{SA} = \frac{a}{2}$.

c. Trong ΔKBD trung tuyến KI thoả mãn $KI = \frac{1}{2}BD$ nên nó là tam giác vuông tại K.

Bài 55: *Đáp số trắc nghiệm* B.



Lời giải tự luận: Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Giả sử $BC \subset (P)$.

Kẻ đường cao AH của ΔABC, suy ra:

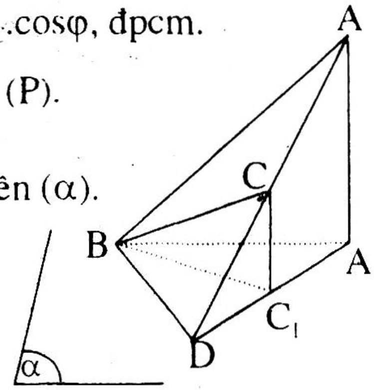
$A'H \perp BC$.

Ta có: $S_{A'B'C'} = \frac{1}{2}A'H.BC = \frac{1}{2}AH.BC.\cos\varphi = S_{ABC}.\cos\varphi$, đpcm.

Trường hợp 2: Giả sử BC không nằm trong mặt phẳng (P).

Dựng mặt phẳng (α) qua B và song song với (P).

- Gọi A_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của A, C lên (α).
- D là giao điểm của AC với (α).



Ta có: $S_{A_1BD} = S_{ABD}.\cos\varphi$, (1)

$S_{C_1BD} = S_{CBD}.\cos\varphi$, (2)

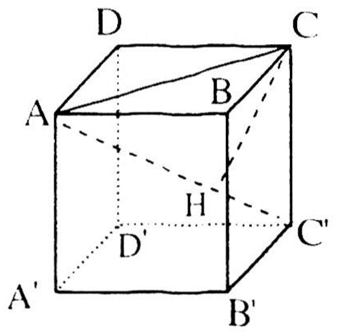
Trừ theo vế (1) và (2), ta được:

$$S_{A_1BC_1} = (S_{ABD} - S_{CBD})\cos\varphi \Leftrightarrow S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi, \text{ đpcm.}$$

Bài 56: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). A; c). A; d). B; e). B.

Bài 57:

a. Nhận xét rằng: $\Delta BAC' = \Delta CA'A = \Delta DAC' = = \Delta A'AC = \Delta B'C'A = \Delta D'C'A$ nên khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.



b. *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Hạ CH vuông góc với AC', ta được:

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

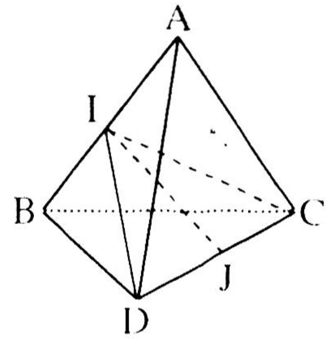
Bài 58: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 59: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 60: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Lời giải tự luận: Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD thì:

- $\Delta ABC = \Delta ABD \Rightarrow IC = ID \Rightarrow IJ \perp CD$. (1)
- $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow JA = JB \Rightarrow IJ \perp AB$. (2)



Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

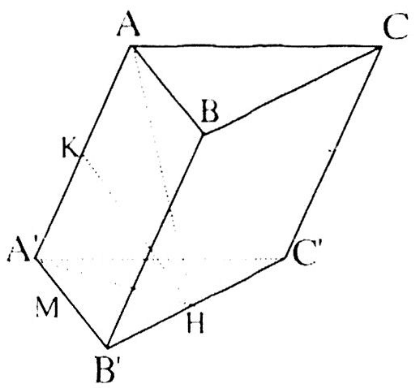
Ta có:

$$IJ^2 = IC^2 - JC^2 = (AC^2 - AI^2) - \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(4a^2 - c^2 - c'^2)$$

$$\Leftrightarrow IJ = \frac{\sqrt{4a^2 - c^2 - c'^2}}{2}.$$

Bài 61: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). A.

Bài 62: *Đáp số trắc nghiệm* a). B; b). C.



a. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy chính bằng AH.

Trong $\Delta HAA'$, ta có: $\widehat{A'} = 30^0$,

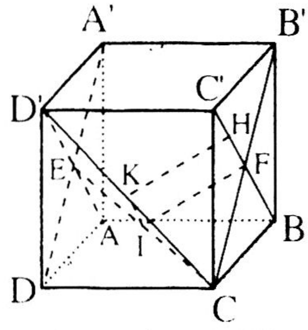
$$AH = AA'.\sin\hat{A}' = a.\sin 30^0 = \frac{a}{2}.$$

b. Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp AH \\ B'C' \perp A'H \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (HAA') \Rightarrow B'C' \perp AA'$.

Trong $\Delta HAA'$ kẻ $HK \perp AA'$ thì HK chính là đoạn vuông góc chung của AA' và B'C'.

Trong $\Delta HKA'$, ta có: $HK = A'H.\sin\widehat{A'} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$

Bài 63: *Đáp số trắc nghiệm* A.

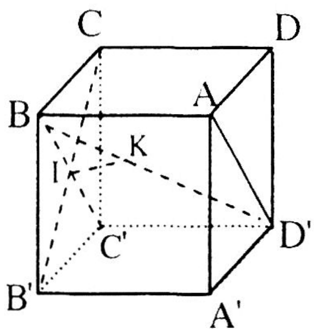


Hướng dẫn: Trong hình vẽ ta có KH chính là đường vuông góc chung của BC' và CD'.

Ta tính được $KH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài 64: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Gọi I là giao điểm của B'C và BC', hạ IK vuông góc với BD'. Ta đi chứng minh IK chính là đoạn vuông góc chung của BD' và B'C, thật vậy:

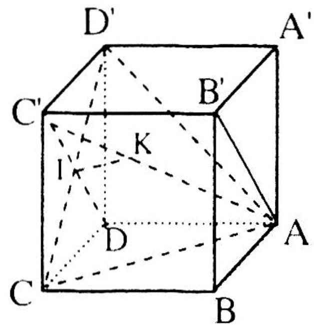


$$\begin{cases} B'C \perp BC' \\ B'C \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow B'C \perp (ABC'D') \Rightarrow B'C \perp IK.$$

Vì hai tam giác BIK và BD'C' đồng dạng, nên:

$$\frac{IK}{D'C'} = \frac{BI}{BD'} \Rightarrow IK = \frac{D'C'.BI}{BD'} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Bài 65: *Đáp số trắc nghiệm* a). A; b). B.



a. Tứ diện DACD' có DA, DC, DD' đôi một vuông góc với nhau, do đó gọi h = d(D, ((ACD'))) thì:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DD'^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{10}}{5}.$$

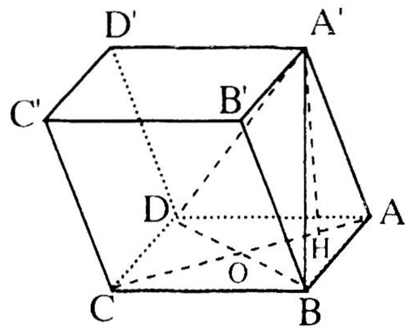
b. Gọi I là giao điểm của C'D và CD', hạ IK vuông góc với AC'. Ta đi chứng minh IK chính là đoạn vuông góc chung của AC' và CD', thật vậy:

$$\begin{cases} CD' \perp C'D \\ CD' \perp B'C' \end{cases} \Leftrightarrow CD' \perp (ADC'B') \Rightarrow CD' \perp IK.$$

Vì hai tam giác C'IK và C'AD đồng dạng, nên:

$$\frac{IK}{AD} = \frac{C'I}{C'A} \Rightarrow IK = \frac{AD.C'I}{C'A} = \frac{a}{2}.$$

Bài 66: *Đáp số trắc nghiệm* C.



Lời giải tự luận: Hạ A'H ⊥ AC, ta có nhận xét:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp A'O \end{cases} \Leftrightarrow BD \perp (OAA')$$

$$\Rightarrow BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD),$$

và vì (ABCD) // (A'B'C'D') nên A'H chính là khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

Nhận xét rằng hình chóp A'.ABD là hình chóp đều, nên ta lần lượt có:

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3},$$

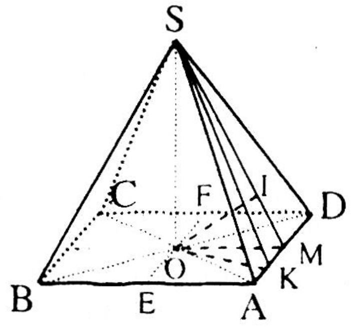
$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Bài 67: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). D.

a. Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD, vì các cạnh bên của hình chóp bằng nhau nên:

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = d(S, (ABCD)).$$

Ta có:



$$SO^2 = SA^2 - AO^2 = SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2$$

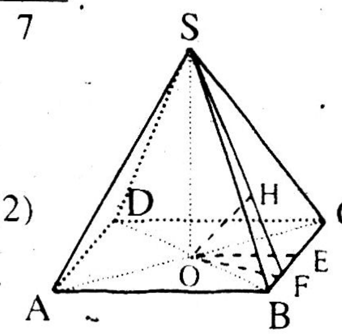
$$= 2a^2 - \frac{1}{4}(4a^2 + a^2) = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

b. Ta nhận thấy: $EF \parallel AD \subset (SAD) \Rightarrow EF \parallel$ (SAD chứa đường thẳng SK.
Do đó, khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K.
Từ nhận xét trên, suy ra: $d(EF, SK) = d(EF, (SAD)) = d(O, (SAD))$.
Gọi M là trung điểm AD, hạ $OI \perp SM$ thì:

$$OI \perp (SAD) \Rightarrow OI = d(O, (SAD)).$$

Trong ΔOSM, ta có: $\dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OM^2} \Rightarrow OI = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 68: *Đáp số trắc nghiệm* a). D; b). A; c). A.



a. Với giả thiết, ta có: ΔOBE đều $\Rightarrow OF \perp BC$. (1)

Mặt khác, ta cũng có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BC \perp (SOF) \Rightarrow (SBC) \perp (SOF)$.

b. Trong ΔSOF hạ OH vuông góc với SF, suy ra:

$$OH \perp (SBC) \Rightarrow OH = d(O, (SBC)).$$

Trong ΔSOF vuông tại O, ta có: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OS^2} + \dfrac{1}{OF^2} \Rightarrow OH = \dfrac{3a}{8}$.

Vì $AO \cap (SBC) = C$ nên:

$$\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC)) = 2OH = \frac{3a}{4}.$$

Bài 69: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Bài 70: *Đáp số trắc nghiệm* C.

Lời giải tự luận: Ta có:

a. Sai, bởi chúng có thể cắt nhau.
b. Sai, bởi chúng có thể song song với nhau.
c. Đúng, dựa trên khái niệm về góc giữa hai đường thẳng.
d. Sai, bởi chúng có thể cắt nhau.

Bài 71: *Đáp số trắc nghiệm* D.
Bài 72: *Đáp số trắc nghiệm* D.
Bài 73: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 74: *Đáp số trắc nghiệm* D.

Bài 75: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 76: *Đáp số trắc nghiệm* B.

Bài 77: *Đáp số trắc nghiệm* B.

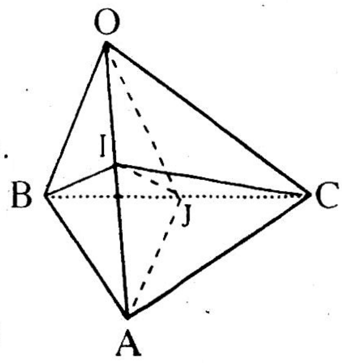
Bài 78: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Lời giải tự luận: Ta có ΔBCD đều và độ dài cạnh bằng $3\sqrt{2}$ nên nó có diện tích:

$$S_{\Delta BCD} = \frac{(3\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 79: *Đáp số trắc nghiệm* A.

Bài 80:



a. Nhận xét rằng: $AB = AC = a$, vì ΔOAB và ΔOAC đều.

Trong ΔOBC vuông tại O ta có:

$$BC^2 = OB^2 + OC^2 = a^2 + a^2 = AB^2 + AC^2$$

tức là ΔABC vuông cân tại A.

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của BC và OA, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp JO \\ BC \perp JA \end{cases} \Leftrightarrow BC \perp (OAJ) \Rightarrow BC \perp OA.$$

b. Với kết quả trong a), ta có ngay: $BC \perp IJ$. (1)

$$OJ = AJ = \frac{1}{2}BC \Rightarrow IJ \perp OA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Trong ΔJBI vuông tại J ta có:

$$IJ^2 = BI^2 - BJ^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow IJ = \frac{a}{2}.$$

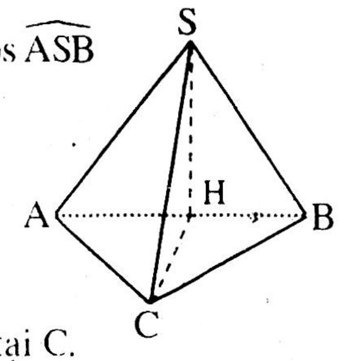
c. Nhận thấy $\widehat{OJA}$ là một trong bốn góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Khi đó, rong ΔOJA ta thấy trung tuyến JI thoả mãn:

$$IJ = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \widehat{OJA} = 90^0 \Rightarrow (ABC) \perp (OBC).$$

Bài 81:

a. Nhận xét rằng:



- Trong ΔSAB, ta có: $AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\widehat{ASB}$

$$= a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2.$$

- Trong ΔSAC đều, ta có $AC = a$.
- Trong ΔSBC vuông cân tại S, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Từ đó, nhận thấy: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

b. Gọi H là trung điểm AB, ta có:

$SH \perp AB,$ (1)

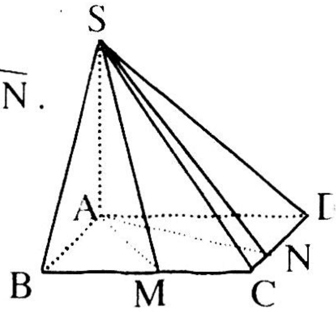
$$SH = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2},\ CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

Suy ra: $SH^2 + CH^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 = SC^2 \Rightarrow \Delta HCS$ vuông tại H

$\Rightarrow SH \perp HC.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S, (ABC)) = SH = \frac{a}{2}$.

Bài 82: Ta có ngay:



$$\begin{cases} AM \perp SA \\ AN \perp SA \\ (SAM) \cap (SAN) = SA \end{cases} \Rightarrow ((SAM), (SAN)) = \widehat{MAN}.$$

Trong ΔAMN, ta có:

$AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - (a - x)^2 = 2ax - x^2$,

$AN^2 = AD^2 - DN^2 = a^2 - (a - y)^2 = 2ay - y^2$,

$MN^2 = CM^2 + CN^2 = x^2 + y^2$,

$$\cos\widehat{MAN} = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM.AN} = \frac{a(x+y) - (x^2+y^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)(2ay - y^2)}}.$$

a. Để (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45^0 điều kiện là:

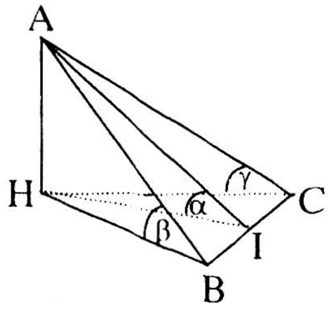
$$\frac{a(x+y) - (x^2+y^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)(2ay - y^2)}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2a^2 = 2a(x+y) - xy.$$

b. Để (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau điều kiện là:

$$\frac{a(x+y) - (x^2+y^2)}{\sqrt{(2ax - x^2)(2ay - y^2)}} = 0 \Rightarrow a(x+y) = x^2 + y^2.$$

Bài 83: Kẻ AH vuông góc với mặt phẳng (P), ta được:

$\widehat{ABH} = \beta$ và $\widehat{ACH} = \gamma$.



Kẻ HI vuông góc với mặt phẳng BC, suy ra:

$BC \perp AI$, theo định lí ba đường vuông góc

$\Rightarrow \widehat{AIH} = \alpha$.

Trong ΔABC vuông tại A, ta có:

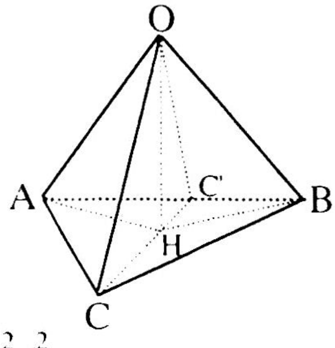
$$\frac{1}{IA^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow \frac{AH^2}{IA^2} = \frac{AH^2}{AB^2} + \frac{AH^2}{AC^2}$$

$\Leftrightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\beta + \sin^2\gamma$, đpcm.

Bài 84: Ta có: $S_{\Delta HAB} = S_{\Delta OAB}.\cos\widehat{OC'H}$

$$= \frac{1}{2}OA.OB\sqrt{1-\sin^2\widehat{OC'H}}$$

$$= \frac{1}{2}OA.OB\sqrt{1-\frac{OH^2}{OC'^2}}, \quad (1)$$



trong đó: OA = a, OB = b,

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OC'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

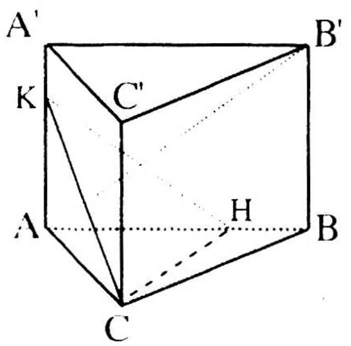
Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta HAB} = \frac{1}{2}a.b.\sqrt{1-\frac{\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}} = \frac{a^2b^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

Chứng minh tương tự, ta nhận được:

$$S_{\Delta HBC} = \frac{b^2c^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}; \quad S_{\Delta HAC} = \frac{a^2c^2}{2\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}.$$

Bài 85:



a. Để xác định thiết diện, ta thực hiện:
- Kẻ CH vuông góc với AB (suy ra CH ⊥ AB').
- Kẻ HK vuông góc với AB'.

Khi đó, ta được thiết diện là ΔCHK.

b. Vì ΔCHK vuông tại H nên:

$$S_{\Delta CHK} = \frac{1}{2}HC.HK. \quad (1)$$

Trong ΔABC, ta có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CA^2} + \frac{1}{CB^2} \Rightarrow CH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, (3)

$$AC^2 = AH.AB \Rightarrow AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

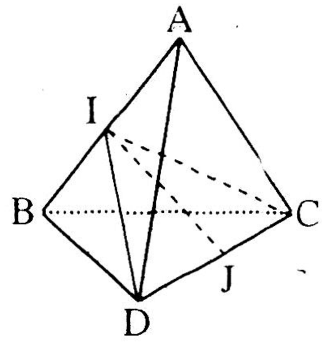
Nhận xét rằng: HK ⊥ AB' ⇒ HK // A'B ⇒ ΔAHK vuông cân tại A

$$\Rightarrow HK = AH\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1), ta được:

$$S_{\Delta CHK} = \frac{1}{2}.\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{a^2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^3b}{\sqrt{2}(a^2+b^2)}.$$

Bài 86: Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.



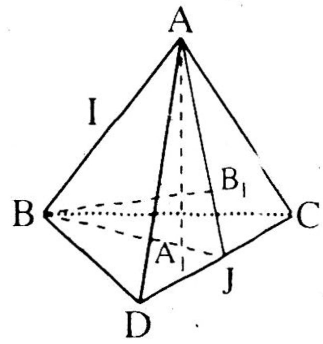
a. Chứng minh (a) và (b) tương đương.

Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, suy ra:

- $\Delta ABC = \Delta BAD \Rightarrow IC = ID \Rightarrow IJ \perp CD.$ (1)
- $\Delta ACD = \Delta BDC \Rightarrow JA = JB \Rightarrow IJ \perp AB.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra IJ chính là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Điều ngược lại vẫn đúng – *Bạn đọc tự chứng minh dựa trên công thức về đường trung tuyến.*



b. Chứng minh (a) và (c) tương đương.

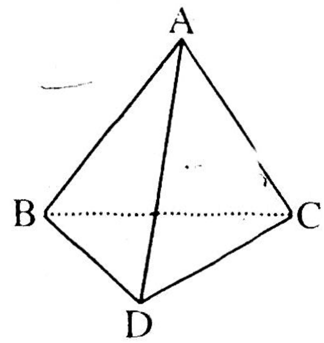
Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, suy ra:

$\Delta ACD = \Delta BDC$ (c.c.c) $\Rightarrow JA = JB \Rightarrow JA_1 = JB_1$

$\Rightarrow \Delta AA_1J = \Delta BB_1J$ (c.g.c) $\Rightarrow AA_1 = BB_1$.

Điều ngược lại vẫn đúng – *Bạn đọc tự chứng minh dựa trên tam giác bằng nhau.*

c. Chứng minh (a) và (d) tương đương.



Từ giả thiết AC = BD, AD = BC, AB = CD, suy ra:

$\Delta ABC = \Delta CDA = \Delta BAD = \Delta DCB$

suy ra: $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$, (1)

$\widehat{CAD} = \widehat{DBC}$, (2)

$\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$. (2)

cộng theo vế (1), (2), (3), ta được:

$$\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB} = \widehat{CDB} + \widehat{DBC} + \widehat{BCD} = 180^0.$$

Điều ngược lại vẫn đúng, bởi ta trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mặt phẳng (BCD) ta được hình khai triển của tứ diện ABCD nhận BC, CD, DB là ba đường trung bình của tam giác đó. Từ đó, suy ra:

AC = BD, AD = BC, AB = CD.

Bài 87: *Hướng dẫn*

a. Tứ giác MNPQ là hình thang có đáy là MN và PQ.

b. Quỹ tích giao điểm I của QM và PN thuộc đường thẳng AB.

c. Quỹ tích giao điểm J của QN và PM thuộc AG, với G là trọng tâm ΔBCD.

Bài 88:

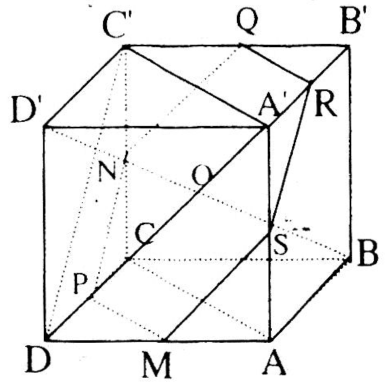
a. Từ giả thiết: $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$

suy ra MN, AC, DC' thuộc ba mặt phẳng đôi một song song với nhau. Do đó MN song song với (ACB').

b. Để có được thiết diện, ta thực hiện:

- Kẻ Mx // AC và cắt CD tại P.
- Nối PN.
- Kẻ Ny // B'C và cắt B'C' tại Q.
- Kẻ Qz // A'C' và cắt A'B' tại R.
- Kẻ Rt // AB' và cắt AA' tại S.

Khi đó, lục giác MPNQRS là thiết diện cần dựng.



Bài 89:

a. Gọi (P) là mặt phẳng qua K, song song với AB và SC, ta có:

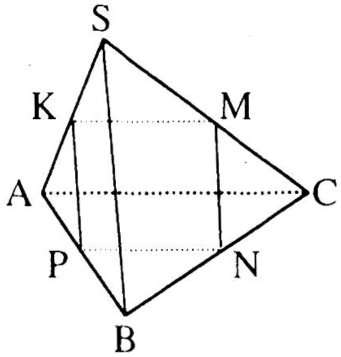
- Mặt phẳng (Q) chứa AB và song song với SC.
- Mặt phẳng (R) chứa SC và song song với AB.

Khi đó, ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song với nhau sẽ chắn trên hai cát tuyến BC và SA các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ, cụ thể:

$$\frac{BN}{AK} = \frac{CN}{SK} = \frac{BC}{AS} \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{AK}{SK} = 1$$

$\Rightarrow BN = CN \Rightarrow N$ là trung điểm BC.

b. Ta xét hai trường hợp:

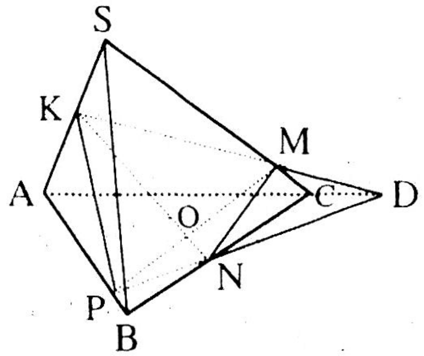


Trường hợp 1: Nếu M là trung điểm SC thì thiết diện là hình bình hành MNPK với P là trung điểm AB. Và hiển nhiên khi đó KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Trường hợp 2: Nếu M không trùng với trung điểm SC thì ta thực hiện:

- Nối KM cắt AC tại D.
- Nối ND cắt AB tại P.

Khi đó, tứ giác MNPK là thiết diện cần dựng.



Gọi $\{O\} = KN \cap MP$, nhận xét rằng:

$d(M, (P)) = d(S, (P))$,

$d(P, (P)) = d(A, (P))$,

$d(S, (P)) = d(A, (P))$,

Suy ra: $d(P, (P)) = d(M, (P)) \Rightarrow OP = OM$

Do đó KN chia thiết diện thành hai phần có diện tích bằng nhau.

Bài 90:

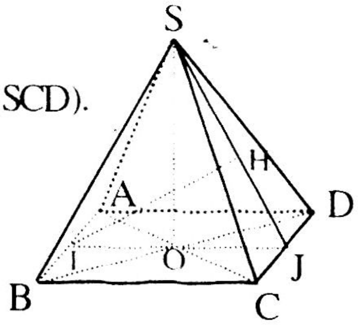
a. Gọi O là tâm của ABCD, ta có ngay:

$$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO = d(S, (ABCD)).$$

Ta có: $SO^2 = SA^2 - OA^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

b. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB và CD.

Hạ IH vuông góc với SJ.



Ta có: $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SO \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp IH \Rightarrow IH \perp (SCD).$

Nhận xét rằng:

$AB \,//\, CD \Rightarrow AB \,//\, (SCD)$

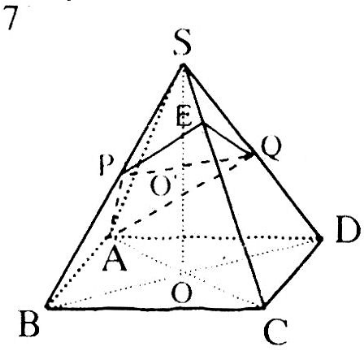
$\Rightarrow d(AB, (SCD)) = d(I, (SCD)) = IH.$

Hai tam giác SOJ và IHJ đồng dạng, nên:

$$\frac{IH}{SO} = \frac{IJ}{SJ} \Rightarrow IH = \frac{SO.IJ}{SJ} = \frac{SO.IJ}{\sqrt{SC^2 - CJ^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

c. Ta có ngay: $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = IH = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

d. Thiết diện được xác định bằng cách:



- Trong (SAC) hạ AE vuông góc với SC.
- Trong (SAB) kẻ EP vuông góc với SC.
- Trong (SAD) kẻ EQ vuông góc với SC.

Khi đó, tứ giác APEQ là thiết diện cần dựng.

Từ cách dựng thiết diện, suy ra:

$$\frac{SP}{SB} = \frac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ \,//\, BD \Rightarrow PQ \perp (SAC) \Rightarrow PQ \perp AE.$$

Từ đó, ta được: $S_{APEQ} = \dfrac{1}{2}AE.PQ.$ (1)

Vì ΔSAC đều nên: $AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{PQ}{BD} = \frac{SO'}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Như vậy, ta được: $S_{APEQ} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

e. Kẻ OM // SC, lấy điểm N sao cho BOMN là hình bình hành, khi đó:

$BN \perp (P) \Rightarrow \widehat{BAN} = (AB, (P))$

Ta có ngay $\sin\widehat{BAN} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập
Minh Tường

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Ngọc Anh

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ : 374 Xô Viết Nghệ Tĩnh P.25 – Q.BT – TP.HCM
ĐT: 5117907 – Fax: 8999898
Email: binhthanhbookstore@yahoo.com

PHƯƠNG PHÁP GIẢI BT TRẮC NGHIỆM HÌNH HỌC 11
Mã số : 1L – 201 ĐH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại Công ty in 2 PHƯỚC.
Số xuất bản : 681 – 2007/CXB/08 – 104/ĐHQGHN ngày 24/08/2007.
Quyết định xuất bản số : 448 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.